

# ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren und fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff, G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien

Der ganzen Reihe 406. Band

## Kuratorium:

W. Gerlach	F. Paschen	M. Planck
R. Pohl	A. Sommerfeld	M. Wien

Unter Mitwirkung  
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft  
herausgegeben von

E. GRÜNEISEN, Marburg/L.  
M. PLANCK, Berlin

Mit 32 Abbildungen im Text



LEIPZIG / VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Im Jahre 1932 erscheinen die Bände 12, 13, 14 u. 15 mit je 8 Hefen. Der Abonnementspreis beträgt pro Band RM. 28.— zuzüglich RM. 1.20 für Porto bei direkter Zusendung für das Inland und RM. 2.— für das Ausland. In Ausnahmefällen Ergänzungshefte gegen besondere Berechnung. Redaktionsschluß am 15. August 1932.

# Inhalt

	Seite
M. Le Blanc und G. Wehner-Leipzig, Untersuchungen über die Umwandlungen in fester Phase beim System Kupfer-Gold. (Mit 8 Figuren) . . . . .	481
R. Ladenburg-Berlin-Dahlem, Untersuchungen über die physikalischen Vorgänge bei der sogenannten elektrischen Gasreinigung. III. Teil. (Mit 1 Figur) . . . . .	510
H. Fahlenbrach-Marburg (Lahn), Berichtigung zu der Arbeit: Über die Variabilität der magnetischen Ionenmomente einiger Elemente der Eisenreihe. (Mit 1 Figur) . . . . .	521
H. Fahlenbrach-Marburg (Lahn), Über eine Konzentrationsabhängigkeit des Magnetismus von $\text{Cr}^{+++}$ in wäßriger, violetter $\text{Cr}(\text{NO}_3)_3$ -Lösung. Beziehung zwischen den Konstanten C und $\Theta$ des Weiss'schen Gesetzes. (Mit 5 Figuren) . . . . .	524
Chr. Möller-Kopenhagen, Zur Theorie des Durchgangs schneller Elektronen durch Materie. . . . .	531
Erik Hallén-Upsala (Schweden), Bemerkungen zu einer Arbeit von Karl F. Lindman: „Über die elektrischen Eigenschwingungen stabförmiger Leiter“ . . . . .	586
Erno Englert-München, Ferromagnetismus und elektrische Eigenschaften. VI. Mitteilung: Longitudinale und transversale ferromagnetische Widerstandsänderung. (Mit 17 Figuren) . . . . .	589
Walther Gerlach-München, Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit von E. Englert, betreffend die Widerstandsänderung in Eisenkristallen . . . . .	613

Die Redaktion der Annalen wird von den auf der Titelseite genannten Herren besorgt. Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn **Geh.-Rat Prof. Dr. E. Gruneisen, Marburg/L., Mainzer Gasse 33**, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekanntgegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrucke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung der Korrekturen an den Verlag auf dem besonderen Bestellzettel, welcher den Korrekturen beiliegt, vermerkt werden.

Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft können die Annalen zu einem Vorzugspreis beziehen.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Den zur Veröffentlichung eingereichten Abhandlungen ist die Mitteilung beizufügen, daß eine Publikation an anderer Stelle nicht erfolgt ist.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes genau anzugeben, wo sie hingehören.

Bei den **Zitaten** wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, welches jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

ette

181

10

21

24

31

36

39

3

t

a

y

t

t

A

5. I

das  
habe  
mit  
sich  
dien  
Glei  
kühl  
gebr  
sich  
pera  
mit  
gebe  
von

hitzu  
einen  
Eins  
Verä  
verze  
solle  
gewi  
oder  
nach  
erreic  
sprec  
sich  
erfor

Weh  
angab  
2  
anorg.  
Stuttg  
An



# ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE, BAND 14, HEFT 5, AUGUST 1932

## *Untersuchungen über die Umwandlungen in fester Phase beim System Kupfer-Gold<sup>1)</sup>*

*Von M. Le Blanc und G. Wehner*

(Mit 8 Figuren)

Es liegen eine ganze Anzahl von Untersuchungen über das System Kupfer-Gold in festem Zustand vor, als letzte haben sich Grube, Schönmann, Vaupel und Weber<sup>2)</sup> damit beschäftigt. Aber allen diesen Untersuchungen, die sich meistens der elektrischen Leitfähigkeit als Hilfsmittel bedient haben, haftet der Übelstand an, daß niemals stabile Gleichgewichtszustände erreicht worden sind. Denn die Abkühlungs- und Erhitzungskurven konnten nicht zur Deckung gebracht werden. Es scheint die Ansicht zu herrschen, daß sich eine solche Deckung auch bei möglichst langsamem Temperaturgang nicht erzielen lasse. In der Tat ist aber stets mit viel zu raschem Temperaturgang gearbeitet worden. So geben Grube und Mitarbeiter eine Erhitzungsgeschwindigkeit von 10° in 25 Minuten an.

Wir werden aus nachstehender Arbeit ersehen, daß Erhitzungs- und Abkühlungskurven sich dann decken, wenn bei einer bestimmten Temperatur gewartet wird, bis eine konstante Einstellung der Leitfähigkeit erfolgt ist. Erst dann darf eine Veränderung der Temperatur vorgenommen werden, wenn nicht verzerrte Formen der Widerstandstemperaturkurven entstehen sollen. Es mag schon jetzt bemerkt werden, daß die Gleichgewichtseinstellung bei manchen Legierungen nicht nach Minuten oder Stunden langer Temperaturkonstanz erfolgte, sondern erst nach Tage, ja Wochen langer eintrat. Sie wurde aber immer erreicht, nur durfte man die Geduld nicht verlieren. Bei Besprechung der durch diese Versuche gewonnenen Resultate wird sich Gelegenheit finden, auf frühere Untersuchungen, soweit erforderlich, einzugehen.

1) Stark gekürzter Auszug aus der Dissertation von Günter Wehner, Leipzig 1931. Dort finden sich auch eingehende Literaturangaben.

2) G. Grube, G. Schönmann, F. Vaupel u. W. Weber, Ztschr. anorg. Chem. 201. S. 41. 1931. Vgl. ferner Dissertation von G. Weber, Stuttgart 1927 und Dissertation von G. Schönmann, Stuttgart 1929.

### I. Herstellung der Legierungen und Apparatur zur Messung der elektrischen Leitfähigkeit

Wir hielten es für angebracht, die Legierungen selbst herzustellen und sie nicht, wie es vielfach üblich ist, fertig von einer anderen Stelle zu beziehen. Für die erhebliche Mühe, die die Herstellung macht, wird man entschädigt durch den Umstand, daß man über die Vorgeschichte der Legierung aus eigener Kenntnis unterrichtet ist. Für die Messung der spezifischen Leitfähigkeit war es nötig, die Legierungen in eine Form zu bringen, die es gestattete, die Dimensionen möglichst genau festzulegen. Es wurden zylindrische Stäbe im Hochvakuum gegossen, die 2—3 mm Durchmesser und eine Länge von etwa 200 mm hatten. Beim Guß eines solchen Stabes wurde jeweils aus derselben Schmelze und nach dem gleichen Verfahren eine Röntgenprobe für Debye-Scherrer-aufnahmen hergestellt, die 0,7 mm dick und 50—60 mm lang war.

Die benutzten Metalle waren von großer Reinheit. Das Gold, das von den Staatl. Sächsischen Hütten- und Blaufarbenwerken in Freiberg für die Dauer der Untersuchung freundlichst zur Verfügung gestellt worden war, enthielt noch eine Spur Silber. Es wurde daher in Königswasser aufgelöst und zweimal umgefällt: mit Ammoniumoxalat bzw. mit Hydroperoxyd in alkalischer Lösung. Als Kupfer wurde solches von Kahlbaum „pro Analysis“ verwandt.

Zum Schmelzen wurde ein selbst hergestellter Kohlegrießofen benutzt, der mit verhältnismäßig geringen Stromstärken bei 220 Volt Spannung Temperaturen bis zu 1500° zu erreichen gestattete. Eingeschmolzen wurden die Metalle in einem Batterseatiegel in einer Atmosphäre von gereinigtem Bombenstickstoff, sodann mit einem Hartporzellanstäbchen umgerührt und hierauf, zur Verhütung einer Entmischung, in einem Gemisch von Äthylalkohol-Wasser (1:1) abgeschreckt.

Dieses so vorbereitete Schmelzgut wurde weiterhin in einen Tammann-Röhrentiegel aus Hartporzellan eingefüllt und in den Gießofen gesetzt, um im Vakuum, nachdem es wiederum zum Schmelzen erhitzt worden war, in die passende Stäbchenform gebracht zu werden.<sup>1)</sup> Diese Stäbchen wurden nunmehr verschieden behandelt. Zum Teil wurden sie langsam abkühlen gelassen, wobei der Ofenstrom mehr oder weniger langsam ausgeschaltet wurde, zum Teil wurden sie in noch fast

1) Die nähere Beschreibung des Schmelz- und Gießofens finden Interessenten in der Dissertation.

flüssigem Zustand herausgezogen und in einem Gemisch Alkohol-Wasser abgeschreckt, um das Leitfähigkeitsdiagramm der abgeschreckten Legierungen nochmals nachprüfen zu können. Die Formen wurden dann jeweils vorsichtig mit einer besonderen Zange zerbrochen. Die so hergestellten Stäbe waren für die Widerstandsmessung sehr gut geeignet, da sich durch die Gleichmäßigkeit der Gießform der Querschnitt sehr genau feststellen ließ. Bei den Stäben traten weder Lunker noch Konzentrationsdifferenzen auf, was durch Messungen einzelner Abschnitte des Stabes nachgeprüft werden konnte. Außerdem wurden an einigen Stäben Proben von den Enden entnommen und analysiert. Die Analysen stimmten innerhalb der analytischen Fehlergrenze mit den eingewogenen Mengen überein. Mit diesem Material wurde die Messung der elektrischen Leitfähigkeit begonnen.

Die Beobachtung der elektrischen Leitfähigkeit und ihrer Änderung mit der Temperatur hat sich, wegen der hohen Empfindlichkeit der Methode, als besonders zuverlässiger Wegweiser bei Konstitutionsuntersuchungen an Metallen erwiesen. Umwandlungen, wie sie gerade beim System Kupfer-Gold vorliegen, die mit sehr geringer Wärmetönung vor sich gehen, so daß sie bei der thermischen Analyse leicht unbemerkt bleiben, können auf diese Weise gut festgestellt werden. Von besonderer Bedeutung ist es aber, daß, entgegen der thermischen Analyse, die Einstellung stabiler Gleichgewichte abgewartet und aufs genaueste kontrolliert werden kann. Über diese Einstellung stabiler Gleichgewichte wurden grundlegende Versuche von Le Blanc, Naumann und Tschesno<sup>1)</sup> an den Systemen Zinn-Wismut und Zinn-Cadmium unternommen. Diese Versuche ergaben, daß nur dann wirkliche Gleichgewichte vorliegen, wenn die Leitfähigkeitskurven der Erhitzung und Abkühlung bei einem sehr langsamen Temperaturgang völlig zusammenfallen. Um solche Messungen durchführen zu können, war es erforderlich, eine Apparatur zu konstruieren, die es bis zu hohen Temperaturen hinauf ermöglichte, den elektrischen Widerstand der Stäbe zu messen, die unter Umständen wochenlang bei konstanter Temperatur liegen mußten ohne der Oxydation zu unterliegen.

Für Präzisionsmessungen sehr kleiner Widerstände hat sich die Doppelbrückenschaltung von Thomson als sehr brauchbar erwiesen, da die Zuleitungswiderstände bei dieser Schaltung

1) M. Le Blanc, M. Naumann u. D. Tschesno, Ber. Sächs. Akad. d. Wissensch., Math.-phys. Klasse 79. S. 1. 1927.

eliminiert werden. Als Abzweigwiderstände dienten zwei Rheostatenkästen mit je 10, 100 und 1000 Ohm, der variable Widerstand war ein starker Draht mit Schleifkontakt. Als Nullinstrument wurde ein Spiegelgalvanometer verwandt.

Die Einzelheiten der Meßvorrichtung sind in der Dissertation beschrieben. Es sei hier nur noch erwähnt, daß als Temperöfen elektrische Röhrenöfen mit Chronindrahtwicklung dienten und die Temperaturschwankungen, selbst bei hohen Temperaturen,  $\pm 1,5^\circ$  nicht überschritten.

## II. Leitfähigkeitsmessungen

### A. Reine Metalle

Zunächst wurden zahlreiche Versuche mit reinen Kupferstäben vorgenommen, bei denen verschiedene Abkühlungsgeschwindigkeiten zur Anwendung kamen. Bei der dann erfolgenden Messung der elektrischen Leitfähigkeit bei Zimmertemperatur zeigten sich merkwürdigerweise sehr große Unterschiede, und es war anfangs schwierig, die stark streuenden Werte in irgendein System einzuordnen. Zuerst wurden Gießformen aus Quarz verwendet.

Es fiel jedoch auf, daß die Leitfähigkeitswerte solcher Kupferstäbe viel tiefer lagen als die, die bisher in der Literatur bekannt waren. Durch Auskleiden der Quarzformen mit einer dünnen Schicht Magnesia konnte keine nennenswerte Änderung erzielt werden. Daraufhin wurden Formen aus Hartporzellan hergestellt. Sofort waren die erzielten Leitfähigkeiten um mehrere Prozent höher als vorhin. Die wichtigsten Werte dieser Versuche, die dann in analoger Weise auch bei reinem Gold vorgenommen wurden, sind in der Tab. I zusammengestellt. Man ersieht daraus, daß aber auch die in Porzellanformen gegossenen Kupferstäbe Unterschiede aufweisen, und zwar hatten die abgeschreckten Kupferstäbe stets eine kleinere Leitfähigkeit als die langsam abgekühlten. Schließlich wurde ein Stab gegossen, der oben rasch, unten jedoch langsam gekühlt wurde. Durch Messung der verschiedenen Abschnitte dieses Stabes wurde ebenfalls eine Änderung der Leitfähigkeit in dem Sinne gefunden, daß das untere Stück einen höheren Wert hatte.

Le Blanc, Naumann und Tschesno hatten bereits bei ihren Untersuchungen gefunden, daß beim Wismut, je nach den Abkühlungsbedingungen, eine verschiedene Leitfähigkeit resultierte, und zwar kam dem langsam gekühlten, grobkristallinen Wismut eine — etwa 2 Proz. — höhere Leitfähigkeit zu als

Nr. Gieß

1 Qu

1 Qu

2 Qu

3 des

4 Porz

4 Porz

5 des

6 des

7 des

7 —

7 —

1 Qu

2 Porz

3 des

4 des

5 Porz

6 des

dem

Grun

sei,

Kris

häng

der

gera

such

mass

krist

mikr

gesch

Es z

der

zeigt

End

1924.

Tabelle 1

## 1. Kupfer

Nr.	Gießform	Art der Abkühlung	Spez. L.	Spez. W.	Nachträgliche Wärmebehandlg.	Bemerkungen
1	Quarz	abgeschreckt	53,00	1,88		
2	—	—	53,77	1,86	nach Temp. bei 750° langs. gek.	d. Zieheisen gez.
3	Quarz desgl.	abgeschreckt	53,75	1,86		
4	desgl.	langsam gekühlt	52,99	1,88		
5	Porzellan	abgeschreckt	55,88	1,79		
6	—	—	58,39	1,71	nach Temp. bei 750° langs. gek.	
7	Porzellan desgl.	abgeschreckt	55,32	1,80		
8	desgl.	desgl.	55,97	1,78		
9	desgl.	obenschnell gek.	55,79	1,79		Dendriten
10	—	Mitte	56,40	1,77		
11	—	unten langs. gek.	57,13	1,71		große Kristalle
12	—	—	58,20	1,71	nach Temp. bei 800° langs. gek.	

## 2. Gold

1	Quarz	abgeschreckt	40,39	2,47		Au nicht umgefällt desgl.
2	Porzellan	langsam gekühlt	43,87	2,28		Au umgefällt
3	desgl.	abgeschreckt	44,68	2,23		desgl.
4	desgl.	langsam gekühlt	44,01	2,27		desgl.
5	—	—	44,10	2,26	nach Temp. bei 800° langs. gek.	desgl.
6	Porzellan desgl.	langsam gekühlt desgl.	44,29	2,25		desgl.
7	—	—	44,89	2,22		desgl.

dem abgeschreckten. Sie sind jedoch der Meinung, daß der Grund dafür nicht in der verschiedenen Korngröße zu suchen sei, sondern vielleicht in einer verschiedenen Orientierung der Kristalle. Eucken und Neumann<sup>1)</sup> glauben aber eine Abhängigkeit der Leitfähigkeit des Wismuts und Antimons von der Korngröße gefunden zu haben, der Effekt liegt allerdings gerade in entgegengesetzter Richtung wie bei unseren Versuchen.

Für Kupfer geben sie an, daß die Leitfähigkeit eines massiven Kristalles sehr nahe den gleichen Wert hat wie ein feinkristallines Material. Es wurden nun an mehreren Stäben mikroskopische Proben an verschiedenen Stellen entnommen, geschliffen, poliert und mit Ammoniak + Hydroperoxyd geätzt. Es zeigte sich, daß die Änderung der Korngröße parallel mit der Leitfähigkeitsänderung ging. Das rasch gekühlte Ende zeigte dendritische Struktur, während das langsam gekühlte Ende aus regelmäßig angeordneten, großen Polygonen bestand.

1) A. Eucken u. O. Neumann, Ztschr. f. phys. Chem. 111. S. 431. 1924.

Hierauf wurde Kupferstab Nr. 7 (Tab. 1) bei  $800^{\circ}$  getempert und im Verlaufe von 4 Wochen auf Zimmertemperatur langsam abgekühlt. Die am rasch gekühlten Ende vorhandenen Dendriten hatten Polygone gebildet. Diese Kristalle waren zwar nicht so regelmäßig angeordnet wie am anderen Ende, jedenfalls war aber eine Sammelkristallisation deutlich zu erkennen. Die Leitfähigkeit des Stabes war, wie aus der Tabelle ersichtlich ist, angestiegen.

Der Einfluß der Korngröße auf die Leitfähigkeit ist also offensichtlich vorhanden, man könnte jedoch der Meinung sein, daß er sekundär ist. Darauf wird hingewiesen in einer Arbeit von Seemann und Vogt<sup>1)</sup>, in der der Einfluß der Gefügeausbildung auf die magnetische Suszeptibilität untersucht wird. Dort wird eine Ansicht von v. Auwers<sup>2)</sup> zitiert, nach der auch der Einfluß der Korngröße auf die magnetischen Eigenschaften sekundär ist insofern, als mit der Korngröße die Ausbildung der Korngrenzen, und damit die Wirkung dort befindlicher Verunreinigungen — etwa von Oxyden — sich ändert. Im Falle der Leitfähigkeitsänderung beim Kupfer wäre diese Vorstellung passend, da durch die Vergrößerung der Zahl der Körner auch die Zahl der widerstandbietenden Oxydhäutchen, die auf den Korngrenzen gedacht sind, anwächst, und somit die Leitfähigkeit herabgesetzt wird.

Schließlich sei hier noch eine Mitteilung von Elsner und Siebe<sup>3)</sup> erwähnt, die den Einfluß verschiedener thermischer und anschließender mechanischer Behandlung auf die elektrische Leitfähigkeit verschiedener Kupfersorten studierten. Es wird dort festgestellt, daß beim Tempern bei verschiedenen Temperaturen die nach dem Abschrecken bei gewöhnlicher Temperatur gemessenen Leitfähigkeitswerte ein Maximum zeigen, falls das Tempern bei  $350-500^{\circ}$  erfolgt ist, und daß dieser Höchstwert mit sinkendem Reinheitsgrad des Kupfers kleiner und zu tieferen Temperaturen verschoben wird.

Bei der Untersuchung des reinen Goldes wurde anfangs das Metall verwandt, wie es geliefert worden war. Die ersten Stäbe wurden mit Quarzformen gegossen, und auch hier zeigte sich verhältnismäßig tiefe Leitfähigkeit. Die Erniedrigung schien zunächst lediglich durch den schon erwähnten, geringen Silbergehalt hervorgerufen zu sein, das Gold wurde deshalb mehrmals umgefällt, wodurch in der Tat die Leitfähigkeit etwas zunahm. Bei Verwendung von Porzellanformen zeigte sich

1) H. J. Seemann u. E. Vogt, *Ann. d. Phys.* [5] 2. S. 976. 1929.

2) O. v. Auwers, *Wiss. Veröff. d. Siemens-Konz.* 7. S. 197. 1928.

3) G. Elsner u. P. Siebe, *Ztschr. f. Metallkunde* 22. S. 397. 1930.

aber eine weitere Zunahme. Einzelwerte dieser Versuche sind auch in Tab. 1 angegeben. Ein Einfluß der Korngröße auf die Leitfähigkeit konnte jedoch nicht festgestellt werden. Auch nachfolgendes Tempern und langsames Abkühlen der beim Gießen abgeschreckten Goldstäbe war — entgegen den Versuchen beim Kupfer — ohne Einfluß. Dies könnte eine Erklärung finden, wenn man die beim Kupfer gemachte Vorstellung der Anwesenheit von Oxydhäutchen auf den Korngrenzen hier zur Anwendung bringt. Da Gold als edles Metall keine Oxyde zu bilden imstande ist, würde hier also dieser sekundäre Effekt wegfallen. Ob diese Annahme berechtigt ist, ließe sich vielleicht durch weitere Versuche an verschiedenen edlen und unedlen Metallen entscheiden, vielleicht spielen hier auch Gitterdeformationen, die durch das Abschrecken entstehen, eine Rolle. Dafür, daß das Material der Gießform von Einfluß ist, konnte keine Erklärung gefunden werden.

## B. Legierungen

### a) Abgeschreckte Legierungen

Nachdem festgestellt worden war, wie die Verhältnisse bei den reinen Komponenten im abgeschreckten sowie im langsam abgekühlten Zustand liegen, wurden die schon von anderen Autoren erhaltenen Werte der abgeschreckten Legierungen nochmals nachgeprüft. Das seiner Zeit von Kurnakow<sup>1)</sup> und seinen Mitarbeitern aufgestellte Diagramm der Leitfähigkeit abgeschreckter Legierungen ist wegen des niedrigen Goldwertes nach Werten kleinerer Leitfähigkeit verzerrt. Die hier untersuchten Legierungen wurden alle bei 1150° gegossen und unmittelbar danach in noch fast flüssigem Zustand im Alkohol-Wassergemisch abgeschreckt. Mit der Präzisionsvorrichtung wurden dann die Leitfähigkeiten bei Zimmertemperatur gemessen. Die Leitfähigkeiten der einzelnen Abschnitte eines Stabes stimmten gut überein. Nur bei wenigen Stäben waren kleine Abweichungen vorhanden. Die gemessenen Werte sind in Tab. 2 zusammengestellt. In allen Tabellen bedeuten *s* spezifische Leitfähigkeiten.

Werden diese Werte zu einer Kurve aufgetragen, so ergibt sich ein einheitlicher, stetig verlaufender Linienzug mit einem Minimum der Leitfähigkeit bei etwa 50 Atom-Proz., wie es für eine ununterbrochene Reihe von Mischkristallen zu erwarten ist.

1) N. S. Kurnakow, Z. anorg. Chem. 54. S. 159. 1907; Journ. of Inst. of Metals 15. S. 305. 1916.



Tabelle 2

Atom-% Au	$s$	$1/s$	Atom-% Au	$s$	$1/s$
0	55,80	1,79	40	7,05	14,19
5	24,60	4,06	45	7,14	14,00
10	15,38	6,50	50	6,95	14,39
15	12,35	8,09	55	7,16	13,97
20	9,73	10,28	60	7,28	13,73
21	9,62	10,39	65	7,78	12,84
25	8,60	11,63	70	8,30	12,05
26	8,38	11,93	80	9,95	10,03
30	8,15	12,27	90	15,08	6,63
36	7,31	13,63	100	44,68	2,23

## b) Getemperte Legierungen

Den Hauptteil der Arbeit beanspruchte die Messung der Leitfähigkeit bei hohen Temperaturen.

Mit besonderer Sorgfalt wurden hier stabile Gleichgewichte abgewartet, indem bei einer bestimmten Temperatur solange gewartet wurde, bis tatsächlich keine Änderung des Widerstandes mehr eintrat. Selbst bei hohen Temperaturen verlief die Umwandlung oft sehr träge, so daß bisweilen viele Tage vergingen, bis sich das Gleichgewicht eingestellt hatte. Dabei wurde die Beobachtung gemacht, daß bei manchen Legierungen derartige Verzögerungen eintraten, daß beispielsweise in 3 Tagen keine Änderung des Widerstandes vor sich ging, am vierten Tage jedoch plötzlich noch eine Änderung von einigen Prozenten zu beobachten war. Ähnliche Effekte stellten auch Le Blanc, Naumann und Tschesno<sup>1)</sup> an den Systemen Zinn-Wismut und Zinn-Cadmium fest. Allerdings lagen dort weniger hohe Temperaturen vor.

Besonders langsam ging die Einstellung der Gleichgewichte beim System Kupfer-Gold vor sich bei der Aufnahme von Abkühlungskurven. Selbst ein Temperaturgang von etwa 10° in 30', wie ihn Schönmann gewählt hat, ist hier noch viel zu schnell. Man bekommt dann auf jeden Fall eine Hysteresis-erscheinung derart, daß die Abkühlungskurve nach tieferen Temperaturen verschoben erscheint. Schönmann berichtet selbst, daß seine Temperatur-Widerstandskurven sich nicht immer dem absoluten Wert, sondern nur dem Kurventyp nach als reproduzierbar erwiesen. Danach erscheint es von vornherein zweifelhaft, ob seine Kurven wirkliche Gleichgewichts-

1) M. Le Blanc, M. Naumann und D. Tschesno, Ber. Sächs. Akad. d. Wiss. Math.-phys. Klasse 79. S. 14. 1927.



kurven sind. In der Tat haben wir nachweisen können, daß es sich bei ihm zum Teil um Verzerrungen infolge ungenügend langen Wartens handelt, und es sei nochmals betont, daß auch bei dem vorliegenden System bei genügend langsamem Temperaturgang Erhitzungs- und Abkühlungskurve zusammenfallen.

Zunächst wurde der Widerstand von 50 zu 50° gemessen, von 200° ab wurden engere Intervalle von 10°, stellenweise sogar von 5° gewählt. Unter den Widerstands-Temperaturkurven kann man 6 verschiedene Typen unterscheiden, die in Fig. 1 dargestellt sind.

Es sei noch bemerkt, daß die Nummer der Legierung im folgenden stets zugleich den Gehalt an Gold in Atom-Prozenten Au angibt.

Zum Typ I gehören zunächst die reinen Metalle. Der Kurvenverlauf ist nicht ganz geradlinig, sondern etwas durchhängend, wie man bei fast allen reinen Metallen findet. Merkwürdigerweise schließt Schönmann daraus beim Gold auf einen Umwandlungspunkt, den er durch Bildung der Ordinaten-differenzen bei etwa 260° findet. Diesem Kurventyp gehören noch die Legierungen 5 und 90 an.

Zum Typ II, der sich aus lauter geradlinigen Stücken zusammensetzt, gehören zunächst Legierung 10, bei der jedoch nur ein Knickpunkt bei 250° vorhanden ist, sowie die Legierungen 15 und 18.

Typ III ist der weitaus wichtigste. Die Kurven der meisten Legierungen zeigen diesen Verlauf. Oberhalb vom Knickpunkt *a* befindet sich die Legierung im Gebiet der  $\alpha$ -Mischkristalle, es kommt dann beim Abkühlen ein plötzlicher Abfall des Widerstandes, während von *d* an der Verlauf wieder weniger steil ist. Bei vielen Legierungen konnten noch zwei Knickpunkte *b* und *c* festgestellt werden. Gerade die Umwandlung beim Knickpunkt *a* des Typus III leidet unter sehr hartnäckigen Verzögerungserscheinungen, so daß also leicht bei der Ab-

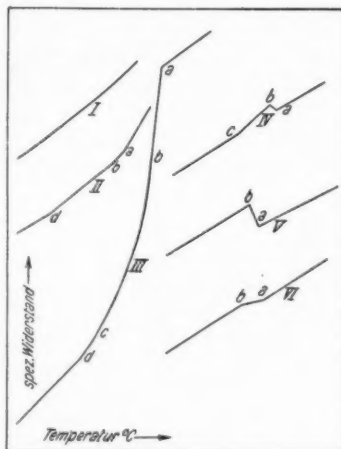


Fig. 1. Typen der Widerstands-Temperaturkurven

kühlungskurve der Umwandlungspunkt zu tieferen Temperaturen verschoben werden kann. Zu Typ III gehören alle Legierungen von 20—64 Atom-Proz. Au.

Typ IV und V sind sich insofern ähnlich, als zwischen den Punkten *b* und *a* plötzlich ein Fall des Widerstandes mit steigender Temperatur eintritt. Von *c* an steigt die Kurve wieder, jedoch mit etwas anderem Temperaturkoeffizienten.

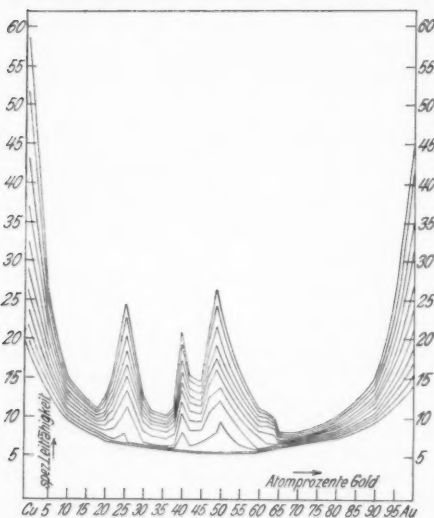


Fig. 2. Isothermen der spez. elektr. Leitfähigkeit

spezifischen Leitfähigkeit bei 20°, und von 50—500° von 50 zu 50° enthält. Die umfangreiche Tabelle mit den Zahlenwerten findet man in der Dissertation.

Bei Betrachtung des Diagrammes fällt zunächst die starke Abnahme der hohen Leitfähigkeit der reinen Komponenten bei kleinen Zusätzen auf. Diese Erscheinung ist typisch für zwei Komponenten, die miteinander Mischkristalle bilden.<sup>1)</sup> Die Isothermen von 450 und 500° verlaufen durchweg stetig wie die Kurve der abgeschreckten Legierungen, wenn sie auch noch

1) Ein Ausnahmefall ist von H. Schöpel beim System Pb-Sb gefunden worden, wo bei kleinem Zusatz von Pb zu Sb eine Leitfähigkeitserhöhung bemerkt wurde (Dissertation, Leipzig 1931).

Typ IV hat noch einen Knick bei *a*, er wurde nur bei der Legierung 65 gefunden, zu Typ V gehören die Legierungen um 70 Atom-Proz. Au.

Schließlich wurde noch ein Typ VI gefunden, bei dem von *b* an der Temperaturkoeffizient des Widerstandes plötzlich etwas kleiner wird, um bei *a* wieder anzusteigen.

Mit Hilfe der gewonnenen Leitfähigkeitswerte wurde ein Diagramm (Fig. 2) aufgestellt, das die Isothermen der spe-

nicht  
ander  
und  
fähig  
bindu  
und  
berei  
liege  
samm  
komm  
Schä  
stätt  
Unst  
lung  
bena  
Leitf  
habe  
Abha  
festg

der  
dun  
Misch  
verlä  
Über  
ein  
schli  
gewi  
gena

Gren  
punk  
Kon  
Umw

stan  
wan

Pay  
nach  
Verb  
alle  
bitzu

nicht völlig deren ideale Gestalt angenommen haben. Alle anderen Isothermen zeigen um die Konzentrationen 25, 40 und 50 Proz. Au Unstetigkeiten. Die drei Maxima der Leitfähigkeit weisen darauf hin, daß sich unterhalb 450° drei Verbindungen bilden, die die Zusammensetzung  $\text{Cu}_3\text{Au}$ ,  $\text{Cu}_2\text{Au}$  und  $\text{CuAu}$  haben. Die Verbindungen  $\text{Cu}_3\text{Au}$  und  $\text{CuAu}$  sind bereits von verschiedenen Seiten untersucht worden. Bei vorliegender Untersuchung zeigte sich aber, daß auch der Zusammensetzung 40 Proz. Au eine maximale Leitfähigkeit zukommt, was auf Verbindungsbildung hinweist.<sup>1)</sup> Die von Schönmann gefundene Kristallart  $\text{Cu}_4\text{Au}$  konnte nicht bestätigt werden. Zwar sind zwischen 20 und 21 Proz. Au kleine Unstetigkeiten der Kurve vorhanden, auch liegt der Umwandlungspunkt der Legierung 20,7 ein wenig höher als der der benachbarten Legierungen, aber eine ausgeprägte Spitze der Leitfähigkeitsisothermen machte sich nicht bemerkbar. Übrigens haben bereits Grube und seine Mitarbeiter in einer späteren Abhandlung an der Existenz dieser Verbindung nicht mehr festgehalten.

Aus dem steilen Abfall der Isothermen zu beiden Seiten der Verbindungen muß geschlossen werden, daß die Verbindungen ihrerseits mit den überschüssigen Komponenten homogene Mischkristalle bilden können. Im Gebiet von 65–80 Proz. Au verläuft die 250°-Isotherme geradlinig, und es treten dabei Überschneidungen mit den anderen Isothermen auf, was auf ein heterogenes Zustandsfeld in diesem Temperaturbereich schließen läßt. Darauf hat zum ersten Male W. Weber<sup>2)</sup> hingewiesen, nur konnte er die Grenzen dieses Feldes noch nicht genau angeben.

Um schließlich genaueren Aufschluß über die Art und die Grenzen der Umwandlungen zu erlangen, wurden die Knickpunkte der Widerstands-Temperaturkurven in ein Temperatur-Konzentrationsdiagramm eingetragen. (Diese Knickpunkte, die Umwandlungspunkte sind, wurden in Tab. 3 zusammengestellt.)

Auf diese Weise kommt man ohne Zwang zu dem Zustandsschaubild, das in Fig. 3 dargestellt ist und über alle Umwandlungen in fester Phase Auskunft gibt.

1) Vor kurzem ist uns eine Arbeit von J. L. Haughton u. R. J. M. Payne (Journ. Inst. of Metals 46. S. 457. 1931) zu Gesicht gekommen, nach der die Verf. etwa gleichzeitig mit uns auf das Auftreten der Verbindung  $\text{Cu}_4\text{Au}$  geschlossen haben. Auch ihre Messungen sind, wie alle anderen bisherigen zu beanstanden, da ihre Abkühlungs- und Erhitzungskurven nicht zusammenfallen.

2) W. Weber, Diss. Stuttgart, 1927. S. 31.

Bei den soeben beschriebenen Messungen von getemperten Legierungen wurde ausgegangen von abgeschreckten Stäben, die — unter Hochvakuum in schwer schmelzbares Glas eingeschmolzen — einige Tage auf  $700^{\circ}$  erhitzt und dann im Verlauf von 5 Wochen auf Zimmertemperatur langsam abgekühlt worden waren. Ob durch diese Behandlung die Bildung der Verbindungen vollständig beendet war, zeigte sich erst dann, wenn die Stäbe in die Meßapparatur eingebaut waren und bei etwa  $200^{\circ}$  längere Zeit konstant gehalten wurden.

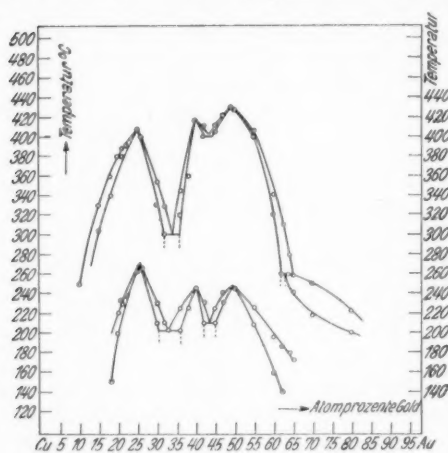


Fig. 3. Die Umwandlungen in fester Phase beim System Cu—Au

Um über den Verlauf der Reaktion und deren Geschwindigkeit etwas zu erfahren, wurde eine große Anzahl der Stäbe nicht im Vakuum eingeschmolzen, getempert und langsam gekühlt, sondern im abgeschreckten Zustand in die Meßvorrichtung eingespannt, und in gewissen Zeitabständen die Änderung ihrer Leitfähigkeit während der Erhitzung beobachtet. Diese Versuche unterscheiden sich von denen Schönmanns insofern, als kein kontinuierlicher Temperaturanstieg gewählt wurde, sondern es wurden bestimmte Temperaturen eingestellt, bei denen die Stäbe liegen blieben, bis keine Änderung der Leitfähigkeit mehr eintrat. [Die sich aus diesen Versuchen ergebenden Werte wurden einmal zu Widerstands-Temperaturkurven (Fig. 4), weiterhin zu Widerstands-Zeitkurven (Fig. 5) zusammengestellt. Die in der Fig. 5 aufgetragenen Ordinaten-

Hier trat oft noch eine Zunahme der Leitfähigkeit ein, woraus hervorgeht, daß die Umwandlung trotz der langen Abkühlungszeit von 5 Wochen noch nicht vollständig war. Diese nachträgliche Zunahme der Leitfähigkeit war besonders groß bei der Legierung 40. Auch ein zweiter gegossener Stab 40 hatte nach gleicher Behandlungsweise dieselbe große Leitfähigkeit.

werte  
ständ  
Mess  
nicht  
die S  
perat  
zeigte  
herau  
die

Fig.  
kurv

geze  
gehe  
Kur  
B u  
von  
tem  
Ten  
Kni  
Ten  
des  
ver

werte für den Widerstand sind hier nicht spezifische Widerstände, sondern bedeuten die Brückenabschnitte der jeweiligen Messung, so daß die einzelnen Werte verschiedener Legierungen nicht direkt miteinander verglichen werden können]. Trotzdem die Stäbe zum Teil wochenlang bei einer bestimmten Temperatur liegen blieben und konstante Leitfähigkeitswerte zeigten, stellte es sich heraus, daß diese Werte, die in Fig. 4 die stark

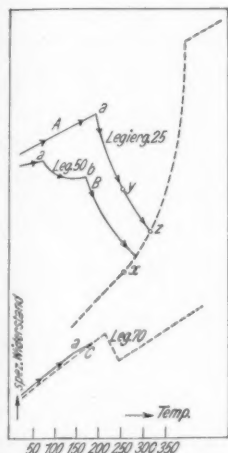


Fig. 4. Widerstands-Temperaturkurven. Übergang zur Gleichgewichtskurve

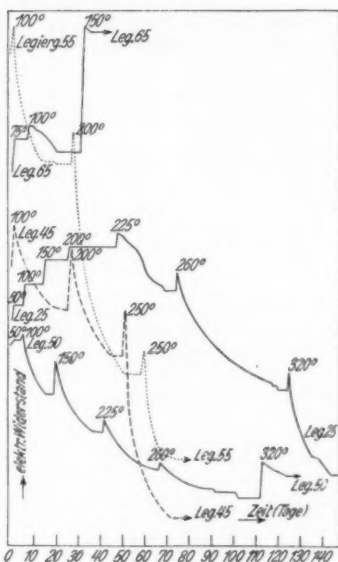


Fig. 5. Widerstands-Zeitkurven

gezeichneten Linien bilden, keineswegs stabilen Zuständen angehörten. Letztere werden durch die gestrichelt gezeichneten Kurven dargestellt (vgl. auch Fig. 1). Die drei Kurventypen A, B und C der Fig. 4 zeigten als Anfangswert den Wert des von hohen Temperaturen abgeschreckten, also bei Zimmertemperatur instabilen  $\alpha$ -Mischkristalles. Bei Erhöhung der Temperatur verlief bei allen Versuchen die Kurve bis zum Knickpunkt *a* geradlinig, sie war bis dahin also Widerstands-Temperaturkurve des abgeschreckten Mischkristalles. Die Lage des Knickpunktes *a* war bei den untersuchten Legierungen verschieden. Bei den  $\text{Cu}_3\text{Au}$ -Legierungen befand sie sich bei

Tabelle 3  
Temperaturen der Umwandlungspunkte

Leg.-Nr.	Typ	Umwandlungstemperaturen			
		a	b	c	d
5	I	—	—	—	—
10	II	250	—	—	—
15	II	330	304	—	—
18	II	360	350	—	150
20	}	380	—	220	200
20,7		380	—	232	—
21		388	—	230	—
22		390	—	237	—
25		407	—	263	—
26		400	—	266	—
30		354	330	230	210
32		328	300	210	—
36		345	320	225	202
38		360	—	—	225
40		417	—	245	—
42		410	400	230	210
45		411	405	225	210
49		430	—	245	—
50		428	—	244	—
55		405	400	225	208
60		340	320	195	160
62		310	259	185	140
64		278	259	178	—
65	IV	258	240	172	—
70	V	249	218	—	—
80	VI	222	200	—	—
90	I	—	—	—	—

höheren Temperaturen als bei den  $\text{Cu}_3\text{Au}_2$ - und bei den  $\text{CuAu}$ -Legierungen. Jenseits des Punktes *a* begann die Bildung der Verbindung. Bei Legierung 25 z. B. trat bei 50, 100, 150 und 200° noch keine Änderung ein, von Verbindungsbildung war also noch nichts zu bemerken, obgleich bei 200° 3 Wochen getempert wurde. Beim Anheizen auf 225° begann sofort die Bildung der Verbindung  $\text{Cu}_3\text{Au}$ , die ein Absinken des Widerstandes zur Folge hatte (vgl. auch Fig. 5). Trotzdem bei 200° äußerst lange getempert wurde, entspricht der Widerstandswert von Punkt *a* keinesfalls einem stabilen Zustand, und es ist möglich, daß bei noch viel längerer Temperzeit die Verbindungsbildung schon bei 200° und bei noch tieferen Temperaturen einsetzt. Die Versuche zeigen also, daß es sich um eigenartige Verzögerungserscheinungen handelt. Aus der Fig. 5 ist zu erkennen, daß, wenn die Bildung der Verbindung begonnen hat, die Geschwindigkeit der Reaktion bei der betreffenden

Temperatur bald wieder abnimmt. Eigentlich müßte man erwarten, daß, wenn die Umwandlung einmal in Gang gekommen ist, sie auch bei dieser Temperatur völlig bis zu Ende verlaufen würde. So sollte man z. B. meinen, daß die Legierung 25 bei 260° schließlich einen Widerstandswert annehmen müßte, der — vorausgesetzt daß man lange genug gewartet hat — bei Punkt  $x$  auf der gestrichelt gezeichneten Kurve der stabilen Werte (Fig. 4) liegt. Es stellt sich jedoch auch bei sehr langer Wartezeit ein Wert mit dem viel höheren Widerstand  $y$  ein, der also instabil ist, und sich vielleicht bei noch sehr viel längerer Temperzeit dem Punkte  $x$  mehr oder weniger nähern würde. Durch eine kleine Temperaturerhöhung konnte die Verzögerungserscheinung überwunden werden, und die Bildung der Verbindung setzte wiederum ein, wobei kurz nach der Temperaturerhöhung die Reaktionsgeschwindigkeit am größten war (vgl. Fig. 5), allmählich kleiner und kleiner wurde und ein neuer konstanter Wert sich einstellte, der sich dann viele Tage lang hielt, aber noch keineswegs einem stabilen Gleichgewicht entsprach. Bei erneuter Temperaturerhöhung wiederholte sich das Spiel.

In Fig. 4 ist noch ein Kurventyp  $B$  gezeichnet, der bei den Legierungen 49 und 50 beobachtet werden konnte. Der Knickpunkt  $a$  lag hier bei viel tieferen Temperaturen als bei Typ  $A$ , die Verbindungsbildung machte sich bereits bei 75° bemerkbar. Außerdem trat noch ein Knickpunkt  $b$  auf, den auch Schönmann bei schnellerem Temperaturgang festgestellt hat. Schönmann glaubt diesen Knickpunkt, den er bei etwa 250° findet, in Zusammenhang mit der Umwandlung bringen zu können, die bei diesen Legierungen bei etwa 240° zu finden ist, d. h., der Punkt  $b$  müßte auf den in Fig. 3 bei niedrigen Temperaturen gezeichneten Kurven liegen. Er ist jedoch gar kein Gleichgewichtspunkt, man darf also aus seiner Existenz nicht auf eine Umwandlung schließen. Bei unseren Versuchen wurde er nämlich schon bei 175° gefunden, und es ist offensichtlich, daß das Zustandekommen auch dieses Punktes, wie aller auf den stark gezeichneten Kurven der Fig. 4 befindlichen Werte, durch die Verzögerungserscheinungen zu erklären ist.

Der Kurvenverlauf von  $C$  (Fig. 4) wurde bei Legierung 70 beobachtet. Trotzdem bei dieser Legierung Verbindungsbildung nicht in Frage kam, lag der Widerstand der abgeschreckten Legierung etwas höher als der später im Gleichgewicht befindlichen Legierung zukommt. Vielleicht ist der höhere Widerstand hier auf Gitterverzerrungen zurückzuführen, die sich

dann, wenn die thermische Bewegung größer wird, ausgleichen können.

Ist man bei diesen Versuchen zu einer hinreichend hohen Temperatur gekommen, bei der die Verbindungsbildung vollständig vonstatten gehen kann, so erreicht man schließlich die gestrichelt gezeichnete Kurve (Fig. 4), auf der, wenn sie einmal erreicht ist, die Legierung sowohl bei Erhitzung als auch bei Abkühlung bleibt, vorausgesetzt, daß genügend lange gewartet wird. Diese Kurve entspricht dann dem wahren Gleichgewicht.

### III. Thermokraftmessungen

Bisher wurden Thermokräfte am System Kupfer-Gold kaum gemessen. Nur Sedström<sup>1)</sup> unternahm vor längerer Zeit an einigen Legierungen dieses Systems Messungen der Peltierwärmen  $\pi$  und berechnete daraus die thermoelektrischen Kräfte mit Hilfe der Thomsonschen Gleichung

$$e = \frac{\pi}{T}.$$

Außerdem wurden von ihm noch die spezifischen Widerstände bzw. Leitfähigkeiten gemessen, und es war auffallend, daß seine Kurven nur eine Spitze bei 50 Atom-Proz. Gold zeigten, obgleich die Arbeit der russischen Forscher schon darauf hinwies, daß zwei intermetallische Verbindungen vorhanden waren. Sedströms Meinung geht dahin, daß im System Kupfer-Gold, je nach der Herstellungsweise der Legierungen, etwas verschiedene Gleichgewichte erreicht werden können. Unterdessen ist von verschiedener Seite und auch durch die vorliegende Arbeit bewiesen worden, daß die Verbindung  $\text{Cu}_3\text{Au}$  unbedingt vorhanden ist, so daß man jetzt annehmen muß, daß Sedströms Legierungen nicht genügend langsam abgekühlt worden sind und infolgedessen die Bildung dieser Verbindung und der von uns zum erstenmal mit Sicherheit festgestellten Verbindung  $\text{Cu}_3\text{Au}_2$  nicht vonstatten gegangen ist.

Um hierüber Klarheit zu schaffen, wurden die Thermokräfte unserer passend ausgewählten im Gleichgewicht befindlichen Legierungen gegen Nickel bei 100–150° von 10 zu 10° gemessen.

Die bei diesen Messungen erhaltenen Werte sind in Tab. 4 zusammengestellt. Die Thermokräfte der verschiedenen Legierungen für 150° sind in einem Thermokraft-Konzentrationsdiagramm eingezeichnet und ergeben einen Linienzug, der aus

1) E. Sedström, *Ann. d. Phys.* 75. S. 551. 1924.



Tabelle 4  
Thermokräfte Kupfer-Gold gegen Nickel

Leg.-Nr.	Temp.	mV	Leg.-Nr.	Temp.	mV
0	100	- 1,782	5	100	- 1,948
	110	1,990		110	2,220
	120	2,222		120	2,521
	130	2,462		130	2,812
	140	2,705		140	3,071
	150	2,948		150	3,380
10	100	- 1,990	18	100	- 1,950
	110	2,272		110	2,200
	120	2,570		120	2,471
	130	2,875		130	2,715
	140	3,135		140	2,969
	150	3,398		150	2,235
25 a	100	- 2,064	25 g	100	- 1,797
	110	2,358		110	2,035
	120	2,645		120	2,228
	130	2,930		130	2,476
	140	3,217		140	2,714
	150	3,501		150	2,975
30	100	- 1,902	36	100	- 2,135
	110	2,160		110	2,424
	120	2,410		120	2,700
	130	2,665		130	2,992
	140	2,916		140	3,269
	150	3,180		150	3,540
40	100	- 1,840	45	100	- 2,073
	110	2,070		110	2,357
	120	2,315		120	2,580
	130	2,557		130	2,878
	140	2,800		140	3,166
	150	3,041		150	3,403
50	100	- 1,850	62	100	- 2,201
	110	2,102		110	2,500
	120	2,353		120	2,800
	130	2,600		130	3,095
	140	2,845		140	3,372
	150	3,088		150	3,659
90	100	- 2,100	100	100	- 1,960
	110	2,399		110	2,215
	120	2,681		120	2,473
	130	2,976		130	2,732
	140	2,981		140	2,981
	150	3,558		150	3,240

Fig. 6 ersichtlich ist. Für andere Temperaturen erhält man analoge Linienzüge.

Bei der Betrachtung der Kurve fallen sofort drei scharfe Maxima auf, die den drei Verbindungen entsprechen. Es zeigt sich also eindeutig, daß die Verbindungen  $\text{Cu}_3\text{Au}$  und  $\text{Cu}_2\text{Au}$  von Sedström übersehen worden sind. Von der Legierung 25 wurde auch ein Stab im abgeschreckten Zustand gemessen, wobei sich ein wesentlich tieferer Wert ergab, der ungefähr auf der gestrichelt gezeichneten Kurve liegt. Man sieht auch

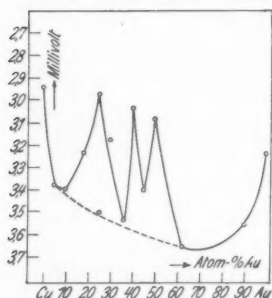


Fig. 6. Thermokräfte des Systems Cu-Au gegen Nickel bei 150°

aus dem Diagramm, daß die Werte der Legierungen 5, 10, 36, 62 und 90, die keine Verbindungen bilden, zusammen mit dem Wert der abgeschreckten Legierung 25, die ebenfalls einen reinen Mischkristall vorstellt, einen Linienzug bilden, der ähnlich dem der elektrischen Leitfähigkeit für abgeschreckte Legierungen ist. Dieser Linienzug zeigt, daß die Thermokraft ebenfalls durch Zusätze zu den reinen Komponenten stark herabgesetzt wird. Auch die Mischkristallbildung der Verbindungen mit den überschüssigen Komponenten

#### IV. Mikrophographische Untersuchungen

Um die Verhältnisse des auf elektrischem Wege gefundenen Zustandsdiagrammes weiterhin zu klären, wurden von vielen Legierungen zahlreiche Schliffe hergestellt und geätzt. Die Ätzung geschah zum Teil mit Königswasser, zum Teil auch nach dem von Schönmann angegebenen Verfahren auf elektrolytischem Wege in Kaliumcyanidlösungen verschiedener Konzentrationen. Diese Methode lieferte ausgezeichnete Ätzbilder, während die Ätzung mit Königswasser Schwierigkeiten bereitete.

Die Ergebnisse der Untersuchung waren folgende. Alle abgeschreckten Legierungen, sowie alle getemperten Legierungen von 0—32 und von 80—100 zeigten entweder dendritische Struktur oder mehr oder weniger regelmäßig angeordnete Polygone ohne Zwischensubstanz, wie es für homogene Mischkristallbildung zu erwarten ist. Wie schon von verschiedenen

Seiten gefunden wurde, ergab sich auch hier für die Verbindung Cu<sub>2</sub>Au keine Änderung der Schlißbilder nach dem Tempern, während die Legierungen von 36—64 nach Wärmebehandlung die schon bekannte Widmannstädtensche Struktur aufwiesen. Die von Schönmann beschriebene heterogene Struktur zwischen 34 und 38 Proz. Au konnte nicht festgestellt werden, die hier untersuchten Legierungen 36 und 38 zeigten dasselbe Schlißbild wie die Legierung 50.

Von den getemperten Legierungen von 65—80 Proz. Au weist der elektrische Befund auf ein heterogenes Feld hin (vgl. Fig. 3). Eine Legierung 70 wurde, um dies zu prüfen, bei etwa 240° 14 Tage getempert und plötzlich in Eiswasser abgeschreckt. Der unmittelbar darauf hergestellte Schliß (Fig. 7) zeigte in der Tat ein komplexes Bild, was darauf hinweist, daß die Legierung 70 bei 240° aus zwei verschieden zusammengesetzten Mischkristallen besteht.

Die Legierungen 62 und 64 wurden — in Übereinstimmung mit Schönmann — aus gewöhnlichen Mischkristallen und aus solchen mit Widmannstädtenscher Struktur bestehend gefunden. Schönmann schließt hieraus, sowie aus dem elektrischen Befund auf eine peritektische Umsetzung vom Typ IV nach Roozeboom und findet die peritektische Horizontale bei 258°. In ausgezeichneter Übereinstimmung hiermit wurde in vorliegender Arbeit (vgl. Fig. 3) diese Gerade bei 259° gefunden. Bei dieser Temperatur wurden bei den Legierungen 62, 64 und 65 Knickpunkte der Widerstandstemperturkurven festgestellt. Die Annahme dieser Peritektiken scheint den Zusammenhang des heterogenen Feldes zwischen 65 und 80 Proz. Au mit der Verbindung einigermaßen gut zu erklären.



Fig. 7. Struktur der Leg. 70 bei 240°

## V. Röntgenographische Untersuchungen

Auch die röntgenographischen Untersuchungen wurden an abgeschrecktem sowie an getempertem Material ausgeführt. Sämtliche abgeschreckten Legierungen zeigten ein kubisch flächenzentriertes Gitter, die Legierungen Nr. 20 und 25 außer den für ein flächenzentriertes Gitter typischen Interferenzen noch solche mit gemischten Indizes.

Die aus sechs Filmen berechneten Werte der Gitterkonstanten (Tab. 5) lagen genau auf einer Geraden (Fig. 8), es scheint nach diesen Messungen das Vegardsche Additionsgesetz erfüllt zu sein, was auch schon die Messungen von Kirchner<sup>1)</sup> und Lange<sup>2)</sup> bestätigt haben. Bain<sup>3)</sup> fand allerdings, daß die Kurve für die Gitterkonstanten abgeschreckter Legierungen etwa unterhalb einer Geraden verläuft, nach einer Untersuchung von Smith<sup>4)</sup> verläuft sie etwas oberhalb der Geraden. Vielleicht könnten hier Messungen nach der Rückstrahlmethode, wie sie Sachs und Weerts<sup>5)</sup> am System Au-Ag ausführten, endgültigen Aufschluß geben.

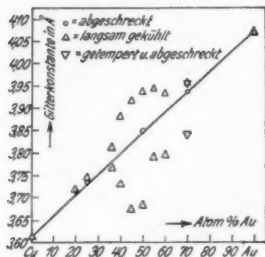


Fig. 8. Gitterkonstanten im System Cu-Au

angenommenen normalen Verteilung machten sich nicht bemerkbar.

Wir kommen nun zu den getemperten Legierungen. Die Filme 20g und 25g (die Nummer der Filme gibt zugleich den Gehalt der Legierung in Atom-Prozenten Au an, a bedeutet abgeschreckt, g getempert) zeigten gegenüber den Filmen 20a und 25a keine Änderung des Gittertypus, sondern lediglich eine Zunahme der gemischten Indizes, sowie eine — allerdings minimale — Zunahme der Gitterkonstanten. Damit läßt sich erklären, wie auch schon von anderer Seite betont wurde, daß die Bildung der Verbindung  $\text{Cu}_3\text{Au}$ , da das Gitter kubisch flächenzentriert bleibt, mikrographisch bisher nicht

1) F. Kirchner, *Ann. d. Phys.* [4] **69**, S. 59. 1922.

2) H. Lange, *Ann. d. Phys.* [4] **76**, S. 476. 1925.

3) E. C. Bain, *Chem. met. Ing.* **28**, S. 21. 1923.

4) C. S. Smith, *Mining and Metallurgy* **9**, S. 458. 1928.

5) G. Sachs u. J. Weerts, *Ztschr. f. Phys.* **60**, S. 481. 1930.

nachgewiesen werden konnte.<sup>1)</sup> Sachs und Weerts wollen allerdings auch bei der Legierung  $\text{Cu}_3\text{Au}$  eine Gitteränderung, und zwar eine Volumenverringerung festgestellt haben. Sie kann jedoch so klein sein, daß dies im Schlibbild nicht zum Ausdruck kommt.

Anders liegen die Verhältnisse bei den Legierungen um die beiden Verbindungen  $\text{Cu}_3\text{Au}_2$  und  $\text{CuAu}$ . Hier ändert sich beim Tempern der Gittertypus, so daß aus dem kubisch flächenzentrierten ein tetragonal flächenzentriertes Gitter entsteht. Dieser Umwandlung entspricht das Auftreten der Widmannstättenischen Struktur im Schlibbild von 36—64 Proz. Au. Der Übergang in das tetragonale Gitter bedingt, wie sich aus den Werten für die Gitterkonstanten ergeben hat, ein Ansteigen der *a*-Achse und ein Abfall der *c*-Achse (vgl. Fig. 8). Da die *c*-Achse in stärkerem Maße abnimmt als die *a*-Achse anwächst, muß man annehmen, daß hier eine Gitterkontraktion in Richtung der *c*-Achse stattfindet. In der Tat hat Grube durch dilatometrische Messungen bei der Umwandlung eine Zunahme der Dichte feststellen können. — (Eine Zusammenstellung der aus den Aufnahmen erhaltenen Werte befindet sich in Tab. 5, weitere Einzelheiten sind aus der Dissertation zu entnehmen.) Eine Aufspaltung der 111- oder 222-Interferenzen, die für eine zweiphasige Umwandlung sprechen würde, konnte hier nicht bemerkt werden. Es wurde aber gefunden, daß die Interferenzen zweier Legierungen 50, die während der Umwandlung zu verschiedenen Zeiten abgeschreckt worden waren, sehr genau an den gleichen Stellen lagen, ein Umstand, der wiederum nicht für eine einphasige Reaktion spricht. Auf diesen Mechanismus wird in Abschnitt VI noch näher eingegangen.

Sowohl der elektrische als der mikrographische Befund weisen darauf hin, daß in der Umgebung der Legierung 70 bei etwa  $250^\circ$  ein heterogenes Feld vorliegt, und es wurde versucht, durch röntgenographische Untersuchungen weitere Klärung zu schaffen. Von einem Stäbchen 70, das längere Zeit bei  $240^\circ$  getempert und in Eiswasser plötzlich abgeschreckt worden war, wurde eine Aufnahme hergestellt. Dem auf elektrischem Wege gefundenen Zustandsdiagramm gemäß wurde erwartet, daß sich zwei kubische Mischkristalle mit

1) M. Le Blanc, K. Richter u. E. Schiebold berichten (Ann. d. Phys. 86. S. 975. 1928, Ann. 1) irrümlicherweise, daß L. Sterner-Rainer (Ztschr. f. Metkde. 17. S. 162. 1925) die Verbindung  $\text{Cu}_3\text{Au}$  mikrographisch nachgewiesen hätte. Dies trifft nicht für die Verbindung  $\text{Cu}_3\text{Au}$ , sondern nur für die Verbindung  $\text{CuAu}$  zu.

Tabelle 5

Film-Nr. <sup>1)</sup>	Wärmebehandlung	Kristallsystem	a Å	c Å	a/c	Belichtungszeit in Std.
0	langs. gek.	kub.	3,612	—	—	2
100	langs. gek.		4,070	—	—	2
20a	abgeschr.		3,711	—	—	2
25a	abgeschr.		3,735	—	—	3
50a	abgeschr.		3,847	—	—	1,5
70a	abgeschr.	tetrag.	3,935	—	—	1,5
20g	langs. gek.		3,714	—	—	1
25g	langs. gek.		3,743	—	—	2
36g	langs. gek.		3,811	3,765	1,012	1
40g	langs. gek.		3,877	3,728	1,040	1
45g	langs. gek.	kub.	3,913	3,671	1,066	2
50g	langs. gek.		3,936	3,680	1,070	1,5
55g	langs. gek.		3,940	3,789	1,040	1,3
60g	langs. gek.		3,930	3,794	1,036	1
70g	langs. gek.		3,954	—	—	1,75
70ga	bei 240° getemp. u. abgeschreckt	tetrag.	3,955	3,840	1,03	1

(Die Genauigkeit der Gitterkonstanten beträgt  $\pm 0,005 \text{ \AA}$ )

verschiedenen Gitterkonstanten zeigten. Überraschenderweise stellte sich jedoch heraus, daß auch hier eine tetragonale Phase — allerdings mit kleinem Achsenverhältnis  $\frac{a}{c} = 1,03$  — vorlag. Ob das Feld heterogen ist, worauf die 250°-Isotherme sowie das mikroskopische Bild hindeuten, konnte hierdurch nicht entschieden werden, da eine Aufspaltung der 111- und 222-Interferenzen nicht zu bemerken war. Der Zusammenhang dieses Feldes mit der Verbindung CuAu ist durch dieses Resultat ziemlich sichergestellt, und durch die im Abschnitt IV bereits besprochene peritektische Reaktion wahrscheinlich richtig charakterisiert.

#### VI. Diskussion der Ergebnisse. Reaktionsmechanismus

Wie schon bei der Beschreibung der Leitfähigkeitsmessungen erwähnt, wurde das in der Fig. 3 dargestellte Zustandsdiagramm erhalten durch Einzeichnen der Knickpunkte der Widerstands-Temperaturkurven in ein Temperatur-Konzentrationsfeld. Von der Temperatur der Soliduskurve des Zustandsdiagrammes abwärts bis ungefähr 430° bestehen alle

1) Die bei der Auswertung der einzelnen Filmstreifen erhaltenen Daten sind in der Dissertation zu finden.

Legierungen aus  $\alpha$ -Mischkristallen. Wie das Diagramm zeigt, scheiden sich bei weiterer Abkühlung drei Verbindungen aus, die den drei Spitzen der Leitfähigkeitsisothermen entsprechen und denen die Zusammensetzungen  $\text{Cu}_3\text{Au}$ ,  $\text{Cu}_2\text{Au}$  und  $\text{CuAu}$  zukommen. Die Verbindungen  $\text{Cu}_3\text{Au}$  und  $\text{CuAu}$  sind schon von verschiedenen Seiten untersucht worden, während die Existenz der Verbindung bei 40 Atom-Proz. Au bisher nicht bekannt war. Da zwei verschiedene Stäbe dieser Zusammensetzung nach ausgiebiger Wärmebehandlung eine ganz gleich hohe, maximale Leitfähigkeit zeigten, ferner die Thermokraftmessung bei 40 Proz. Au einen sehr hohen Wert ergab, und auch verhältnismäßig hohe Umwandlungspunkte (vgl. Fig. 3) in der Gegend von 40 Proz. Au zu beobachten waren, mußte auf eine neue Verbindung geschlossen werden. Leider waren die Röntgenaufnahmen gerade dieser Legierung nicht besonders gut ausgefallen, da hier abgedrehte Stäbe verwendet werden mußten. Es konnte aus den erhaltenen Aufnahmen nur ersehen werden, daß auch diese Legierung tetragonale Struktur hat. M. Le Blanc, K. Richter und E. Schiebold<sup>1)</sup> weisen darauf hin, daß nach ihren röntgenographischen Untersuchungen bei dieser Zusammensetzung eine ganz ausgesprochen tetragonale Phase auftritt, „die in der Exaktheit der Orientierung ihrer Atome derjenigen mit dem stöchiometrischen Verhältnis von 0,5 Molenbruch kaum nachsteht“. Dieser Befund spricht immerhin nicht gegen die Annahme der Verbindung.

Bei Temperaturen um 250° machen alle drei Verbindungen eine weitere Umwandlung durch. Schönmann hat bereits darauf hingewiesen, er nennt diese Umwandlung eine sekundäre. Diese Umwandlung war aber bis jetzt nur elektrisch nachweisbar und machte sich bemerkbar in einer plötzlichen Richtungsänderung der Widerstands-Temperaturkurve. Es wurden nun Legierungen, die zwischen 250 und 400° getempert und abgeschreckt worden waren, verglichen mit Legierungen, die ganz langsam bis auf Zimmertemperatur gekühlt waren, also dem Zustand unterhalb 250° entsprachen. Der Vergleich wurde sowohl röntgenographisch wie auf mikrographischem Wege vorgenommen, führte aber stets zu dem Ergebnis, daß ein unterschiedliches Verhalten der beiden Zustände in dieser Beziehung nicht zu bemerken war. Auch hier liegt demnach der Fall so, wie Le Blanc, Richter und Schiebold<sup>2)</sup> schon bemerken, daß eine Übereinstimmung der mikrographischen und röntgeno-

1) a. a. O. S. 497.

2) a. a. O. S. 978, Anm. 2.



graphischen Untersuchung mit dem elektrischen Befund nicht immer vorhanden ist, da im einen Fall Änderungen in der Konstellation der Atomzentren, im anderen aber Änderungen der Elektronenbahnen beobachtet werden. Jedenfalls weisen die Ergebnisse der elektrischen Untersuchungen darauf hin, daß zwei „Modifikationen“ der Verbindungen bestehen, und es wäre interessant zu erfahren, ob das magnetische Verhalten der Legierungen diese Annahme stützen kann. Die von Seemann und Vogt<sup>1)</sup> ausgeführten Messungen zeigten nämlich einen deutlichen Einfluß der Gefügeausbildung auf die magnetische Suszeptibilität, die Untersuchungen wurden aber nur an langsam gekühltem Material durchgeführt, das der Modifikation entspricht, die unterhalb 250° stabil ist.

Aus dem Verlauf der Leitfähigkeitsisothermen kann geschlossen werden, daß die Verbindungen mit den beiden überschüssigen Komponenten Mischkristalle zu bilden vermögen. Dafür spricht auch, daß die verschiedenen Eigenschaften der reinen Verbindungen um so weniger ausgeprägt sind, je entfernter die Zusammensetzung der obigen Mischkristalle von der der Verbindung ist.<sup>2)</sup> Bei der Verbindung  $\text{Cu}_3\text{Au}$  konnte die Mischkristallbildung mit Kupfer bis zur Legierung 10 beobachtet werden, während die Verbindung  $\text{CuAu}$  mit Gold bis zur Legierung 64 Mischkristalle bilden kann. Wie es mit der gegenseitigen Mischbarkeit der Verbindungen untereinander steht, ist kaum mit Sicherheit zu sagen. Das von Schönmann angegebene heterogene Feld von 34—38 Proz. Au, das einen Zusammenhang zwischen beiden Umwandlungen zeigen soll, scheint in dieser Breite nicht zu bestehen. Der von Schönmann für Legierungen von 36—38 Proz. Au angegebene Typ einer Widerstands-Temperaturkurve, der hier ganz besonders sorgfältig nachgeprüft wurde, konnte nicht bestätigt werden, ebensowenig der in seiner Darstellung eingezeichnete Verlauf, der theoretisch zu erwarten wäre beim Durchlaufen zweier eutektischer Horizontalen. Die Leitfähigkeit der Legierung 38 wurde außerdem wesentlich höher gefunden als die der Legierung 36; wäre hier ein heterogenes Feld vorhanden, so müßten hier geradlinige Stücke auftreten. Immerhin könnte dies noch der Fall sein zwischen 32 und 36 Proz. Au. Leider waren hier keine zwischenliegenden Konzentrationen vorhanden, so daß die Geradlinigkeit der Isothermen nicht nachgewiesen werden konnte. Schönmann glaubt immerhin auch aus mikro-

1) *Ann. d. Phys.* [5] 2. S. 976. 1929.

2) Vgl. z. B. das Härte-diagramm von Kurnakow.



graphischen Befunden auf heterogene Struktur schließen zu müssen. Ob eine Mischungslücke zwischen den Verbindungen  $\text{Cu}_3\text{Au}_2$  und  $\text{CuAu}$  besteht, oder ob durchgehende Mischbarkeit vorhanden ist, konnte nicht festgestellt werden. Nur durch Einfügung zahlreicher Zwischenkonzentrationen in diesen Gebieten, und durch Messung wirklich stabiler Zustände könnte hier noch Klarheit geschaffen werden. Die zweite Umwandlung der Legierungen mit 50 Proz. und höheren Goldgehalten konnte wesentlich weiter verfolgt werden. Die Umwandlungspunkte der Schönmannschen Kurven sind in diesem Gebiet zu höheren Temperaturen verschleppt worden. Mit Sicherheit wurde die Umwandlung in die zweite Modifikation bis 64 Proz. Au gefunden. Nun hat allerdings die Widerstands-Temperaturkurve der Legierung 65 noch einen deutlichen Knickpunkt bei  $172^\circ$ , der sich auszeichnet in den entsprechenden Linienzug im Zustandsdiagramm einfügt. Dieser Umstand scheint dafür zu sprechen, daß die Mischkristallbildung von der Verbindung  $\text{CuAu}$  mit Gold bis 65 Proz. Au geht. Die mikrophische Untersuchung, die zeigen sollte, ob hier noch Widmannstädtensche Struktur vorliegt, war aber nicht eindeutig. Über die Erklärung des Zusammenhanges des heterogenen Gebietes von 65—80 Proz. Au mit den  $\text{CuAu}$ -Legierungen durch Annahme einer Peritektikalen ist bereits im Abschnitt über mikrophische Untersuchungen berichtet worden. Die Ausdehnung des heterogenen Feldes konnte nur bis zu 80 Proz. Au festgestellt werden. Bei der Legierung 90 war eine Unstetigkeit in der Temperatur-Widerstandskurve nicht mehr aufzufinden.

In Übereinstimmung mit Weber und Schönmann wurde gefunden, daß die Verbindungen nicht genau den stöchiometrischen Zusammensetzungen 25 und 50 Proz. entsprechen, sondern bei etwa 25,6 und 49 Proz. Au liegen. Ob die Verbindung  $\text{Cu}_3\text{Au}_2$  auch eine Abweichung zeigt, konnte nicht festgestellt werden, da entsprechende Legierungen in unmittelbarer Nähe nicht vorhanden waren. Auch Seemann<sup>1)</sup> hat bei seiner Untersuchung über die elektrische Leitfähigkeit der  $\text{AuCu}_3$ -Legierungen bei tiefen Temperaturen festgestellt, daß die höchste Leitfähigkeit einer Legierung mit etwa 25,24 Proz. Au zukommt. Es stellte sich nun weiterhin heraus, daß die Spitzen der Leitfähigkeitsisothermen, die bei tieferen Temperaturen besagte Abweichungen von den genauen Zusammensetzungen der Verbindungen zeigen, mit steigender Temperatur

1) H. J. Seemann, Ztschr. f. Phys. 62. S. 824. 1930.

sich allmählich zu den exakten stöchiometrischen Verhältnissen verschieben.

Neuerdings haben sich C. Wagner und W. Schottky<sup>1)</sup> auf theoretischer Grundlage mit der Klärung dieses Verhaltens der „geordneten Mischphasen“, wie sie die intermetallischen Verbindungen nennen, beschäftigt. Sie stellen verschiedene Gittertypen mit Fehlstellen für geordnete Mischphasen auf, und sie sind der Ansicht, daß im Gleichgewicht auch der Kristall streng stöchiometrischer Zusammensetzung Störungsstellen aufweist, wie sie auch bei Überschuß der einen oder anderen Komponente vorhanden sind, nur mit dem Unterschied, daß bei der Verbindung die Zahl der Fehlordnungsstellen beider Atomsorten gleich ist. Nur mit Hilfe dieser Annahme ist ein kontinuierlicher Übergang von Kristallen mit Überschuß der einen Komponente zu Kristallen mit Überschuß der anderen Komponente denkbar. Auf Grund statistisch-thermodynamischer Überlegungen werden Gleichungen für die chemischen Potentiale der Komponenten und für die Aktivitäten als Funktion der Zusammensetzung aufgestellt. Der Verlauf dieser Eigenschaften ist durchaus kontinuierlich, was als Begründung für das Vorhandensein von Fehlstellen auch im Kristall streng stöchiometrischer Zusammensetzung angenommen wird. Bei geordneten Mischphasen läßt sich der Zusatzwiderstand, der in Mischkristallssystemen zu dem aus den Komponenten additiv errechneten Widerstand hinzukommt, als lineare Funktion der Störungsstellen relativ zur Gesamtzahl der Gitterplätze ansetzen. Das Minimum des Widerstandes liegt nach dieser Vorstellung bei der Konzentration mit kleinstem Fehlordnungsgrad. (Als Fehlordnungsgrad bezeichnen Wagner und Schottky das Verhältnis der Zahl der fehlgeordneten Teilchen einer Komponente zur Gesamtzahl der Gitterplätze im Kristall bei stöchiometrischer Zusammensetzung.) Die Lage des Minimums ist nun nach den experimentellen Befunden nicht auf die streng stöchiometrische Zusammensetzung beschränkt. Offenbar kann eben auch eine Legierung mit wenig abweichender Zusammensetzung den kleinsten Fehlordnungsgrad aufweisen. Für diese Vorstellung spricht die hier gefundene Tatsache, daß bei steigenden Temperaturen das Minimum des Widerstandes sich nach der stöchiometrischen Zusammensetzung verschiebt. Vielleicht werden bei starker Wärmebewegung der Teilchen im Gitter der reinen

1) C. Wagner u. W. Schottky, *Ztschr. f. phys. Ch.*, Abt. B, 11. S. 163. 1930.

Verbin  
dann  
Ordnun  
Zusan  
reiche  
Wagn  
auf ir  
nente

S  
des R  
aus d  
Cu<sub>2</sub>A  
phasie  
Umw  
Meinu  
nehme  
der k  
gehe.  
vall v  
jeweil  
gewic  
ratur  
aufna  
kenne  
tatsäc  
Auch  
könne  
lich v  
an, d  
der U  
einan  
ratur  
kühlu  
Krist  
haft  
wurde  
Wege  
fund  
der 1

[4] 86

Verbindung die Fehlstellen weitgehend ausgeglichen, so daß dann die Legierung mit genauer Zusammensetzung der idealen Ordnung am nächsten kommt. Die nicht streng stöchiometrischen Zusammensetzungen können diesen Zustand natürlich nie erreichen, da gemäß der Annahme des Substitutionstyps von Wagner und Schottky die überschüssigen Komponenten auf irgendwelchen Plätzen des Teilgitters der anderen Komponente verbleiben müssen.

Schließlich sei noch eingegangen auf die strittige Frage des Reaktionsmechanismus der Verbindungen bei ihrer Bildung aus den Komponenten durch Abkühlung. Für die Verbindung  $\text{Cu}_3\text{Au}$  kann man wohl mit Sicherheit annehmen, daß sie einphasig verläuft, da der Gittertyp erhalten bleibt. Über den Umwandlungsverlauf der Verbindung  $\text{CuAu}$  sind jedoch die Meinungen sehr geteilt. Borelius, Johannsson und Linde<sup>1)</sup> nehmen an, daß die Umwandlung einphasig verläuft, d. h. daß der kubische Kristall kontinuierlich in einen tetragonalen übergehe. Dieser Vorgang würde sich in einem Temperaturintervall vollziehen. Dann wäre zu einer bestimmten Temperatur jeweils nur eine einzige, ganz bestimmte Kristallart (nach Gleichgewichtseinstellung) vorhanden, und die in bestimmten Temperaturabschnitten der Umwandlung vorgenommenen Röntgenaufnahmen würden demnach verschiedene Gitterkonstanten erkennen lassen. Borelius, Johannsson und Linde wollen tatsächlich verschiedene Achsenverhältnisse gefunden haben. Auch Gorsky<sup>2)</sup> glaubt aus seinen Versuchen erkennen zu können, daß der Übergang in die tetragonale Phase kontinuierlich verläuft. Eine große Zahl anderer Autoren nimmt dagegen an, daß der Vorgang zweiphasig verläuft, daß also während der Umwandlung kubische und tetragonale Kristalle nebeneinander vorliegen, dabei könnte die bei der betreffenden Temperatur instabile Kristallart infolge von Überhitzung oder Unterkühlung noch vorhanden sein. Der Übergang in die stabile Kristallart müßte im Falle der zweiphasigen Reaktion sprunghaft erfolgen. Von Le Blanc, Richter und Schiebold<sup>3)</sup> wurden in einigen Fällen tatsächlich auf röntgenographischem Wege zwei Phasen nebeneinander vorgefunden. Auch der Befund von G. Sachs und K. Oshima<sup>4)</sup>, nach dem die Linien der Röntgenbilder stets an den gleichen Stellen auftreten,

1) G. Borelius, C. H. Johannsson u. J. O. Linde, *Ann. d. Phys.*

[4] **86.** S. 291. 1928.

2) W. Gorsky, *Ztschr. f. Phys.* **50.** S. 64. 1928.

3) M. Le Blanc, K. Richter u. E. Schiebold, *a. a. O.*

4) G. Sachs u. K. Oshima, *Ztschr. f. Phys.* **63.** S. 210. 1930.

spricht für zweiphasigen Verlauf. Durch zwei Röntgenaufnahmen von zwei verschiedenen Legierungen mit 50 Proz. Au, die in der Umwandlung begriffen und von etwa  $400^{\circ}$  zu verschiedenen Zeiten abgeschreckt worden waren, wurde diese Tatsache bestätigt. Die entsprechenden mikrophischen Aufnahmen zeigten neben den alten Polygonen der Mischkrystalle Widmannstättenische Struktur. Andererseits geben U. Dehlinger und Graf<sup>1)</sup> an, daß sie bei ihren Versuchen am Einkristall einen Zwischenzustand gefunden haben, und bemerken ferner, daß die reine Verbindung sehr weich, der Zwischenzustand jedoch sehr hart sei. Im Gegensatz dazu zeigte bei unseren Versuchen die langsam gekühlte Verbindung stets große Härte. Gegen den einphasigen Verlauf, der in einem Temperaturintervall vor sich gehen würde, spricht auch die sprunghafte Änderung der Widerstands-Temperaturkurven beim Umwandlungspunkt. Für die Verbindung  $\text{Cu}_3\text{Au}$  ist, da auch sonst große Ähnlichkeit mit der Verbindung  $\text{CuAu}$  besteht, mit großer Wahrscheinlichkeit der gleiche Reaktionsmechanismus anzunehmen. Das Vorhandensein eines Vergütungseffektes ist hier sehr wahrscheinlich und wäre immerhin von Bedeutung für die Verarbeitung dieser Legierung.

Für die Kinetik der Umwandlung haben K. Oshima und G. Sachs<sup>2)</sup> drei Fälle diskutiert. Die Umwandlung geht

1. spontan an allen Stellen gleichzeitig;
2. nach einem statistischen Gesetz ähnlich dem radioaktiven Zerfall;
3. durch Keimbildung und anschließendes Wachstum der Keime.

Bei Betrachtung der Fig. 5, in der die Widerstandsänderung mit der Zeit dargestellt ist, fällt sofort auf, daß der erste Fall nicht zutreffen kann. Fall 3, bei dem S-förmige Kurven resultieren müßten, ist zwar in einigen wenigen Fällen tatsächlich zu beobachten (z. B. Legierung 25 bei  $225^{\circ}$ ). Allerdings könnten, wie schon erwähnt, Verzögerungserscheinungen hier eine Rolle spielen, da diese Kurvenform nur bei solchen Temperaturen auftritt, wo die Reaktion eben erst beginnt bemerkbar zu werden. Die meisten Kurven sprechen für den Fall 2, für den sich auch Sachs und Oshima entschieden haben, und der wohl eine e-Funktion darstellt. Charakteristisch für den Reaktionsverlauf sind die außerordentlich starken Ver-

1) U. Dehlinger u. L. Graf, *Ztschr. f. Phys.* **64**, S. 360. 1930.

2) K. Oshima u. G. Sachs, *Mitlg. d. deutsch. Materialprüfungsanstalt*, Sonderheft XIII. 1930.

zögerungserscheinungen, die immer wieder zum Stillstand der Reaktion führen, und nur durch weitere Temperaturerhöhungen überwunden werden können.

#### Zusammenfassung

1. Es wurde eine Apparatur konstruiert, mit deren Hilfe hochschmelzende Legierungen zu Stäben für Leitfähigkeitsmessungen und Röntgenproben für Debye-Scherreraufnahmen im Hochvakuum gegossen werden können, ferner eine solche zur Messung der Leitfähigkeit der Stäbe in Abhängigkeit von der Temperatur bis 500°.

2. Mit Hilfe dieser Apparaturen wurden Leitfähigkeitsmessungen am System Gold-Kupfer vorgenommen. Auf die früheren Arbeiten über dieses System wurde dauernd Bezug genommen.

a) Es ergab sich für reines Kupfer eine evtl. sekundäre Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Korngröße, was bei Gold nicht zu beobachten war.

b) Die Werte der Leitfähigkeiten der von hoher Temperatur abgeschreckten Legierungen lagen auf einer U-förmigen Kurve, die für Mischkristalle typisch ist.

c) Die Messungen an getemperten Legierungen unterhalb 450°, unter besonderer Berücksichtigung stabiler Gleichgewichte, ergaben ein Diagramm von Leitfähigkeitsisothermen, die drei Maxima aufweisen, woraus auf die Existenz dreier Verbindungen  $\text{Cu}_2\text{Au}$ ,  $\text{Cu}_3\text{Au}$ ,  $\text{CuAu}$  geschlossen wird, die mit überschüssigen Cu- bzw. Au-Atomen wiederum Mischkristalle bilden können. Die gefundenen Umwandlungspunkte wurden zu einem Zustandsdiagramm vereinigt, das die Umwandlungen der Verbindungen zeigt, und in dem auch die Grenzen des von Weber gefundenen heterogenen Feldes zwischen 65 und 80 Proz. Au genauer festgelegt wurden. Auf röntgenographischem Wege wurde neu festgestellt, daß die zu dem Feld gehörigen Kristalle tetragonale Struktur haben.

3. Die Befunde der Leitfähigkeitsmessungen wurden durch Thermokraftmessungen, mikrographische und röntgenographische Untersuchungen z. T. präzisiert und gestützt. Besonders diskutiert wurden die Abweichungen der Verbindungen von der stöchiometrischen Zusammensetzung und der Mechanismus des Reaktionsverlaufes der Verbindung  $\text{CuAu}$ .

Leipzig, Physikalisch-chemisches Institut der Universität.

(Eingegangen 11. Mai 1932)

**Untersuchungen über die physikalischen Vorgänge  
bei der sogenannten elektrischen Gasreinigung**

**III. Teil**

**Von R. Ladenburg**

(Mit 1 Figur)

(Mitteilung aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie  
und Elektrochemie in Berlin-Dahlem)

1. In zwei experimentellen Arbeiten habe ich, zum Teil zusammen mit H. Sachsse und W. Tietze, die physikalischen Grundlagen der sogenannten Elektrischen Gasreinigung (E.G.R.) (auch Elektrofilter oder Cottrellverfahren genannt) näher untersucht.<sup>1)</sup> Die erste Arbeit (im folgenden zitiert als E. G. R. I) befaßt sich mit der maximalen elektrischen Aufladung kleiner Schwebeteilchen im Ionenfelde der Coronaentladung eines Elektrofilters und mit der Geschwindigkeit, die die Teilchen unter dem Einfluß des elektrischen Feldes der Kammer erhalten. Das Ergebnis ist, kurz zusammengefaßt, daß kuglige Teilchen von  $10^{-4}$  cm Radius 200—400 Elementarladungen — je nach den Verhältnissen in der Kammer — aufnehmen; die Ladung kleinerer Teilchen nimmt linear mit dem Radius ab, bei größeren wächst sie mit dem Quadrat des Radius. Entsprechend ist die nach dem Stokesschen Gesetz berechenbare Geschwindigkeit von Teilchen, deren Radius kleiner als  $10^{-4}$  cm ist, nahezu unabhängig vom Radius und beträgt bei den wirkenden Feldstärken von etwa 3000 Volt/cm 1,4—3 cm/sec, für größere Teilchen wächst sie proportional mit dem Radius und erreicht dadurch Werte, die zum Verständnis der Wirksamkeit der Elektrofilter genügen (I, Tab. 2).

In der zweiten Arbeit („E. G. R. II“) haben wir die Wirkung des elektrischen Windes näher untersucht, der von jedem Glimmpunkt einer Coronaentladung wie von einer hochgeladenen Spitze ausgeht und dadurch entsteht, daß die im elektrischen Felde sehr schnell bewegten Gasionen ihren Impuls auf die Luftteilchen übertragen und ihnen so eine gleichgerichtete Ge-

1) I. Teil: R. Ladenburg (zum Teil gemeinsam mit H. Sachsse), *Ann. d. Phys.* [5] 4. S. 863. 1930. — II. Teil: R. Ladenburg und W. Tietze, *Ann. d. Phys.* [5] 6. S. 581. 1930.

schwindigkeit erteilen. Die Stärke des elektrischen Windes läßt sich übrigens — was in der genannten Arbeit noch nicht angegeben ist — analog einem Ansatz von J. J. Thomson<sup>1)</sup> so abschätzen, daß man die elektrische Kraft des Feldes auf die Ionen eines z. B. zylindrischen Volumens gleich der mit dem Querschnitt multiplizierten Druckdifferenz an den Enden des Zylinders und diese gleich  $\delta v^2/2$  setzt, wo  $\delta$  die Dichte,  $v$  die erzeugte Geschwindigkeit der durch den Ionenimpuls bewegten Luft ist; ist  $i$  die elektrische Stromstärke,  $u$  die Ionenbeweglichkeit,  $q$  der Querschnitt,  $l$  die Länge der bewegten Luftsäule, so erhält man

$$(1) \quad \frac{i \cdot l}{u q} = \frac{\delta v^2}{2}$$

und findet z. B. mit

$$i = 1 \cdot 10^{-6} \text{ Amp.}, \quad l = 6 \text{ cm}, \quad u = 450 \text{ cm/sec pro 1 cmgsec}, \\ \delta = 1 \cdot 10^{-3}, \quad q = 3 \text{ cm}^2, \quad v \sim 1,5 \text{ m/sec.}$$

Dieser Wert ist natürlich nur eine obere Grenze, da ein Teil des übertragenen Impulses durch Turbulenz, Gas- und Wandreibung verloren geht.

Die in E. G. R. II beschriebenen Versuche — die in einem nicht strömenden Gase ausgeführt wurden — zeigten, daß von den einzelnen Glimmpunkten einer Sprühelektrode Windstrahlen zur Gegenelektrode gehen, deren Geschwindigkeit unter den elektrischen Bedingungen eines Elektrofilters 20 bis 60 cm beträgt und daß die Kontinuität der Gasströmung durch Rückströmungen zur Sprühelektrode außerhalb bzw. zwischen den Glimmpunkten gewahrt ist, die im allgemeinen auf breiter Fläche und wesentlich langsamer als die Strömung von den Glimmpunkten fort erfolgt; nur auf den dem Glimmpunkt abgewandten Teil der Ausströmer hin fließen ähnlich schnelle, gerichtete Windströme. Die in die Windströmungen geratenden Schwebeteilchen werden von ihnen naturgemäß mit gleicher Geschwindigkeit mitgerissen, solange nicht andere Kräfte auf sie einwirken. Hieraus haben wir geschlossen, daß in der Praxis der E. G. R. zwar die Wanderungsgeschwindigkeit größerer Teilchen ( $\rho > 10^{-4} \text{ cm}$ ) im wesentlichen durch ihre elektrische Ladung (und natürlich durch das elektrische Feld der Coronaentladung) bestimmt ist, daß aber die kleinen Teilchen ( $\rho \leq 10^{-4} \text{ cm}$ ), die allerdings in der Technik nur in

1) Vgl. J. J. Thomson, *Conduction of electricity gases* (2. edition) S. 69, 1906; vgl. auch Jakob Kunz, *Phys. Rev.* 19. S. 165. 1922; *Trans. Illinois State Acad. of Science* 15. S. 320.



seltenen Fällen eine wesentliche Rolle spielen, infolge der von den Glimmpunkten zur Niederschlagselektrode gerichteten elektrischen Windströme wesentlich größere Geschwindigkeit erhalten können als der Wirkung der elektrischen Feldstärke auf die von den Teilchen mitgeführte Ladung entspricht. Diese muß andererseits bei der schließlichen Abscheidung der Teilchen die ausschlaggebende Rolle spielen, da die Windströme unmittelbar vor den Wänden der Elektrofilter abgebogen werden — wenigstens, wenn diese nicht aus durchbrochenen Netzen bestehen, sondern kontinuierliche Flächen sind —, so daß die rein elektrische Kraft die kleinen Teilchen aus den Windströmen herausfischt. Andererseits kommt den Rückströmungen, speziell den auf die einem Glimmpunkt abgewandte Seite der Ausströmer gerichteten Windströmen (dem „Sog“) die wichtige Aufgabe zu, die Staubteilchen immer wieder den Glimmpunkten und Ionenströmen zuzuführen und dadurch ihre Aufladung zu beschleunigen bzw. zu vergrößern; ohne diese Rückströmungen würden die Teilchen, die im Gase schwebend das Elektrofilter durchströmen, eventuell große Strecken zurücklegen, ehe sie in einen Ionenstrahl gelangen.

2. Diese die Abscheidung fördernden Wirkungen des elektrischen Windes (E. W.) hat W. Deutsch kürzlich auf Grund verschiedener Überlegungen, aber ohne neue experimentelle Unterlagen, bestritten<sup>1)</sup>; er kommt dabei zum Schluß, daß die Abscheidung der Schwebeteilchen in Elektrofiltern aus der Strömung des elektrischen Windes heraus etwa ebensoviel Zeit erfordere wie für ein ruhendes Gas *ohne* elektrischen Wind und daß dieser nur die untergeordnete Wirkung habe, die Schwebeteilchen jederzeit in gleichmäßiger Verteilung zu halten und eine allgemeine, statistisch ungeordnete Durchwirbelung des Gases zu erzeugen. Die erstgenannte Behauptung sucht der Verf. dadurch zu begründen, daß er unter der stillschweigend gemachten Annahme, alle Schwebeteilchen eines Querschnitts eines zylindrischen Elektrofilters seien elektrisch geladen, die „Abscheidungsfunktion“ ausrechnet, d. h. den pro Zeiteinheit abgeschiedenen Anteil der vorhandenen Schwebeteilchen, und zwar einmal *mit* elektrischem Wind und dann *ohne* ihn. Nun werden aber die

1) W. Deutsch, Ann. d. Phys. [5] **9**, S. 249. 1931. Schon früher hat derselbe Verf. (Ann. d. Phys. [4] **68**, S. 335. 1922; Ztschr. f. techn. Phys., a. a. O., spez. S. 427) die Meinung geäußert, der E. W. bewirke in den Elektrofiltern höchstens eine allgemeine Wirbelbewegung, die ebenso sehr hemmend wie fördernd für den Transport der Teilchen von der Ausströmer- zur Niederschlagselektrode sei.

Schw  
Glim  
strö  
linde  
aus h  
S. 61  
des  
punk  
Sog  
des  
wenn  
der  
ihre

elekt  
über  
mach  
Mess  
mung  
zum  
digke  
und

rend  
u mi  
von  
rasch  
gezei  
des I  
von  
schma  
schen  
der I  
dann  
gekrü  
größe  
Ströu  
den I  
Wirb  
berec  
die i

versch  
An



Schwebeteilchen erst durch die Spitzenströme, die von den Glimmpunkten ausgehen und die den „elektrischen Windstrom“ erzeugen, aufgeladen. Wenn sich daher in einem Zylinderquerschnitt ein Glimmpunkt befindet (*mehrere* können sich aus hydrodynamischen Gründen nie darin befinden, vgl. E. G. R. II, S. 615), so werden höchstens die Schwebeteilchen innerhalb des kegelartigen Ionenstroms, in dessen Spitze der Glimmpunkt liegt, aufgeladen. Erst die Windströmung, speziell der Sog auf der Rückseite des Glimmpunktes, kann die außerhalb des Ionenstromkegels befindlichen Stauteilchen (wenigstens, wenn man zunächst von Strömen des ganzen Gases parallel der Zylinderachse absieht) in den Ionenstrom bringen und ihre Aufladung ermöglichen.

Deutsch berechnet nun die Abscheidungsfunktion mit elektrischem Wind, indem er einige „einfache“ Annahmen über die Verteilung der Windströme im Zylinderquerschnitt macht, die allerdings größtenteils mit den Ergebnissen unserer Messungen keineswegs im Einklang sind, z. B. daß der Strömung im Winkelbereich  $\alpha$  zur N. E. hin eine Rückströmung zum Draht im Bereich  $\beta = 4\alpha$  entspricht, daß die Geschwindigkeit  $u_r$  im Abstand  $r$  vom Draht umgekehrt proportional  $r$  und gleich  $u_R \frac{R}{r}$  ist, wenn  $R$  der Zylinderradius ist (während unsere Messungen ein äußerst langsames Absinken von  $u$  mit  $r$  gezeigt hatten, vgl. E. G. R. II, S. 599), und daß auch von der Achse des Windkegels nach den Seiten hin ein sehr rasches Absinken der Geschwindigkeit stattfindet, während wir gezeigt haben, daß die Windgeschwindigkeit von der Achse des Kegels bis zu  $45^\circ$  nur wenig abnimmt. Die Annahmen von Deutsch laufen darauf hinaus, daß innerhalb des schmalen, axial schraffierten Teils  $O A^{IV} \dots A^I \dots A$  der (schematischen) Fig. 1 <sup>1)</sup> die Luft nach außen strömt, mit einer seitlich der Richtung  $OA$  rasch abfallenden Geschwindigkeit, daß sie dann parallel den konzentrischen Kreislinien bis zur gekrümmten Kurve  $O B^{IV} \dots B^{III} \dots B^I \dots B$  fließt, um in dem größeren radial schraffierten Teil zurückzuströmen. Eine solche Strömung ist natürlich hydrodynamisch nicht möglich, da in den Punkten  $A^I \dots A^{III} \dots A^{IV}$  sowie in  $B^I \dots B^{III} \dots B^{IV}$  plötzlich Wirbel entstehen und wieder vergehen müßten. Deutsch berechnet nun die Zeitfunktion, mit der die „Füllung“, d. h. die in den konzentrischen Kanälen (außerhalb der radial

1) In der Fig. 1 ist der Buchstabe  $O$  in der Mitte der Linie  $AB$  versehentlich fortgelassen.

schraffierten Teile) befindlichen Staubteilchen infolge ihrer Ladung durch die elektrische Kraft des Feldes abgeschieden werden (*A*), und sodann diejenige Funktion, die die Abschei-

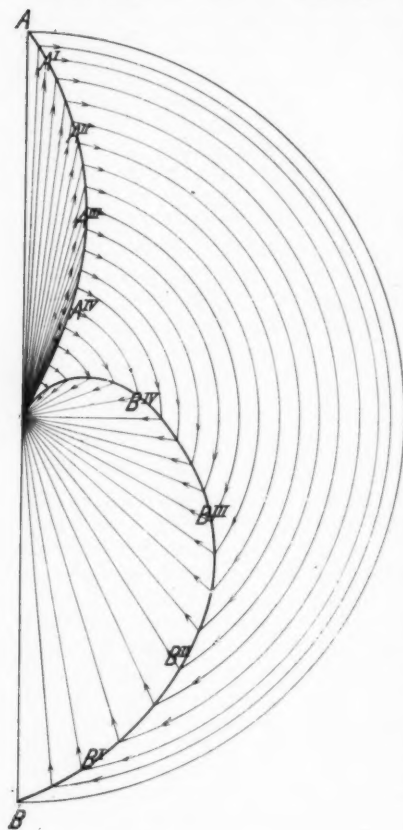


Fig. 1.

weil ja Deutsch ein äußerst rasches Absinken der Windgeschwindigkeit von der Achse zur Seite annimmt. So kommt das sonderbare Ergebnis zustande, daß die Abscheidung mit Wind ebenso viel Zeit wie ohne Wind erfordert.

Unserer Meinung nach kommt es wesentlich auf das Ver-

dung des „Nachflusses“ aus den axial schraffierten „Röhren“ bestimmt (*R*). Die Summe  $A + R$  nennt er die Abscheidungsfunktion mit Wind und vergleicht dies Ergebnis mit der Funktion „ohne Wind“, die die Abscheidung der im ganzen Hohlraum befindlichen als geladen vorausgesetzten Staubteilchen allein durch die elektrische Kraft des Feldes erfordert. Die Teilchen, die sich in dem konzentrischen Kanalraum befinden, werden also in beiden Fällen gleich behandelt; und da dieser Raum bereits  $\frac{2}{3}$  des gesamten Raumes ausmacht, stimmen die Funktionen natürlich in beiden Fällen zum größten Teil, nämlich zu  $\frac{2}{3}$ , genau überein. Tatsächlich enthält dieser Teil der Funktion (*A*) [vgl. Gl. (14) von Deutsch, a. a. O., S. 256] die Windgeschwindigkeit überhaupt nicht. Und im übrigen kleineren Teil spielt der Wind auch nur eine geringe Rolle,

R. L.

hält  
sche  
will  
ist,  
der  
gesa  
ausg

Vert  
einer  
nega  
Vers  
Dure  
über  
Zylin  
Dral  
des  
Glim  
Meß  
und  
nisse

Ges  
Winkl  
(des

fließ  
a p  
beide  
geme  
kege  
verte  
noch  
träch  
fließ  
Strom  
weni

geste

von

hältnis der Summe aus Windgeschwindigkeit plus rein elektrischer Geschwindigkeit zu letzterer an, wenn man beurteilen will, ob der E. W. für die Abscheidung der Teilchen förderlich ist, da nach unseren Versuchen die letzte kurze Strecke, auf der der E. W. vor der Wand abgebogen wird, klein gegen den gesamten Weg der Teilchen ist. So kam unser in E. G. R. II ausgesprochenes und oben wiederholtes Ergebnis zustande.

3. Um ein Urteil über die seitliche und die vertikale Verteilung der Stromstärke eines einzelnen Glimmpunktes an einem vertikal in einem geerdeten Zylinder ausgespannten negativ geladenen Draht zu bekommen, haben wir noch einige Versuche ausgeführt<sup>1)</sup>: dazu wurde der Zylinder von 18 cm Durchmesser isoliert um seine Achse drehbar aufgehängt und über ein Mikroamperemeter geerdet, während dicht vor der Zylinderwand ein isolierter, über ein Galvanometer geerdeter Draht ausgespannt wurde. An einer Gradteilung oberhalb des Zylinders wurde der Winkel  $\varphi$  abgelesen, den der vom Glimmpunkt zur Zylinderwand gerichtete Radius mit dem Meßdraht bildete. Das Mikroamperemeter diente zur Messung und Kontrolle des Gesamtstroms. Tab. 6<sup>2)</sup> enthält die Ergebnisse einer Meßreihe.

Tabelle 6

Gesamtstrom $5 \cdot 10^{-8}$ Amp., 1 Skt. des Galvanometers = $1 \cdot 10^{-3}$ Amp.										
Winkel $\varphi$ in Grad	0	20	40	60	80	100	120	140	160	
Ausschlag (des Galvanometers) in Skt.	$\left\{ \begin{array}{cccccccccc} 6,5 & 6,4 & 6,0 & 5,5 & 4,6 & 3,2 & 1,6 & 0,6 & 0,3 \end{array} \right.$									

Wie man sieht, ist der von einem Glimmpunkt zur Wand fließende Ionenstrom kein enger Kegel, wie man vielleicht a priori erwarten könnte, sondern erstreckt sich über  $90^\circ$  beiderseitig des mittleren Radius — so wird auch die von uns gemessene große Öffnung des vom Ionenstrom erzeugten Windkegels verständlich. Entsprechend wurde auch die Stromverteilung in vertikaler Richtung gemessen und gefunden, daß noch 2 cm unter- und oberhalb des Glimmpunktes ein beträchtlicher Anteil des horizontal vom Glimmpunkt fortfließenden Stromes vorhanden war. Allerdings wird diese Stromverteilung durch die Anwesenheit vieler Glimmpunkte wenigstens in vertikaler Richtung wesentlich geändert werden.

1) Ähnliche Versuche wurden, wie wir hören, bei S. S. W. angestellt (vgl. Anm. 1 folgender Seite).

2) Die Numerierung der Tabellen schließt sich an die Nummern von E. G. R. I und II an, um Verwechslungen zu vermeiden.

4. In unseren bisherigen Betrachtungen ist jedoch ein Umstand nicht in Rechnung gestellt, auf dessen Bedeutung Deutsch in der oben zitierten Arbeit mit Recht nachdrücklich hinweist: nämlich die Gesamtströmung des staubhaltigen Gases, die in der Praxis mit Geschwindigkeiten von etwa  $\frac{1}{2}$ –4 m/sec stattfindet und in einem zylindrischen Elektrofilter naturgemäß axial erfolgt. Diese Strömung bewirkt, wie Deutsch allerdings ohne auf Einzelheiten einzugehen meint, eine statistisch ungeordnete Durchwirbelung des Gases, da sich beim Passieren jedes Sprühpunktes ein hochkomplizierter Windströmungsvorgang dem axialen Strom überlagert. Dieser Ansicht können wir uns zwar nicht anschließen, da die Ionenströme der einzelnen Glimmpunkte auch beim axialen Strömen des Gases bestehen bleiben und notwendig parallel gerichtete Gasströme erzeugen. In der Tat konnten solche Windströme auch im strömenden Gas durch Versuche im Elektrofilter-Laboratorium der Siemens-Schuckert-Werke<sup>1)</sup> mit einwandfrei an der Wand zylindrischer Filter eingebauten Staudrucksonden nachgewiesen werden; wobei sich zugleich eine gewisse Verschiebung in der Stromrichtung und eine Verbreiterung des Windstrahles gegenüber den Messungen im ruhenden Gas zeigte. Es ist also sicher, daß die elektrischen Windströme auch im strömenden Gas bestehen bleiben.

Ob aber im strömenden Gas eine zusätzliche, zur Wand gerichtete Geschwindigkeit der mitgeführten Staubeilchen durch die Wirkung des E. W. bestehen bleibt, ist nicht ohne weiteres klar, wenigstens wenn die Gasströmungsgeschwindigkeit über  $\frac{1}{2}$  m/sec beträgt. Denn die den Strom im wesentlichen tragenden Gasionen haben — jedenfalls wenn sie aus einzelnen Ionen bestehen — eine vielmals größere Geschwindigkeit als die axiale Gasströmung und werden durch diese auf ihrem Wege zur Wand nur eine relativ kleine Strecke mitgerissen.<sup>2)</sup> Die in einem Windstrahl von 20–60 cm/sec Geschwindigkeit befindlichen Staubeilchen jedoch werden im allgemeinen nicht innerhalb

1) Nach freundlicher persönlicher Mitteilung der Herren R. Seeliger u. G. Mierdel; die Versuche sollen ausführlich demnächst veröffentlicht werden.

2) Allerdings ist noch zu berücksichtigen, daß der Strom zum Teil sicher von relativ langsamen größeren Molekülkomplexen (Langevinionen) getragen wird, so daß der für die Wirkung des E. W. maßgebliche Unterschied zwischen der Geschwindigkeit der Ionen und der des E. W. wesentlich kleiner ist als für einzelne Ionen; denn je kleiner die Beweglichkeit der den übertragenen Impuls liefernden Ionen, um so größer ist die Geschwindigkeit des durch den übertragenen Impuls erzeugten elektrischen Windes [vgl. Gl. (1)].

dieses Windstrahls bis zur Wand hin gelangen, sondern erhalten nur innerhalb einer gewissen Wegstrecke, die der achsenparallelen Ausdehnung des Windkegels entspricht (vgl. E. G. R. II, S. 600), die zur N. E. hin gerichtete Geschwindigkeitskomponente, werden dann durch den axialen Gasstrom herausgeführt, wobei sie wegen ihrer Trägheit jene zur Wand gerichtete Komponente noch eine Zeitlang beibehalten, gelangen aber alsbald in die Wirkung eines anderen Glimmpunktes, der ihnen eventuell eine zum Draht gerichtete Geschwindigkeitskomponente erteilt. Diese durch den E. W. bewirkten Zusatzgeschwindigkeiten würden sich im Mittel gerade aufheben, wenn das Rohr unendlich lang wäre; tatsächlich aber bleibt im allgemeinen eine zusätzliche, durch den E. W. bewirkte und zur Wand gerichtete Komponente übrig. Denn die Anordnung der Windstrahlen ist nicht statistisch ungeordnet (vgl. E. G. R. II, 17, S. 607), vor allem wird ein Teilchen im Moment der elektrischen Aufladung zugleich von einem zur Wand hinggerichteten, also die Abscheidung fördernden Windstrahl getroffen, da die aufladenden Ionen sich stets zur Wand hinbewegen und die umgebende Luft und die darin schwebenden Staubteilchen mitreißen. Wenn die Aufladung in solchem Abstand von der Wand erfolgt, daß die Teilchen durch die gemeinsame Wirkung von elektrischer Triebkraft und Windstrahl bis zur Wand gelangen, ist die fördernde Wirkung des Windes deutlich — dieser Fall ist keineswegs selten, da die Ionen und Windstrahlen sich kegelförmig vom Ausströmerdraht zur Gegenelektrode hin erstrecken, so daß bei gleichmäßiger Verteilung des Staubes über den Querschnitt der E. G. R.-Kammer mehr Teilchen nahe der Wand als nahe dem Draht von Ionen-, d. h. von Windstrahlen getroffen werden. Wenn die Teilchen aber, ehe sie zur Wand gelangen, durch den axialen Gegenstrom entführt werden und in einen rückströmenden Wind gelangen, so läßt sich ganz allgemein keine Aussage darüber machen, ob der Wind bei der Abscheidung dieser Teilchen merklich fördernd wirkt oder nicht. Außerdem bleibt die andere Wirkung des E. W. bestehen, daß er nämlich die Staubteilchen immer wieder den Ionenströmen zuführt und ihre Aufladung und dadurch auch die Abscheidung, wenigstens indirekt, fördert.

5. Um die wahre Geschwindigkeit der Staubteilchen unter den Bedingungen der E. G. R. zu messen, könnte man daran denken, von einer wichtigen Beziehung Gebrauch zu machen, die in allgemeiner Form von Anderson<sup>1)</sup> und von Horne<sup>2)</sup>,

1) Ewald Anderson, *Chem. and Met. Eng.* **26**. S. 151. 1922; *Ind. and Eng. Chem.* **16**. S. 1028. 1924.

2) G. N. Horne, *Journ. Amer. Inst. El. Eng.* **S. 552**. 1922.

in der hier gebrauchten speziellen Form zuerst von Deutsch<sup>1)</sup> aufgestellt worden ist, und die aussagt, wie der Reinigungsgrad  $\eta$  eines zylindrischen Elektrofilters, d. h. die auf der Strecke  $l$  stattfindende relative Abnahme der Staubbichte  $n$ , vom Zylinderradius  $R$ , der Gasströmungsgeschwindigkeit  $V$  und von der radialen Wanderungsgeschwindigkeit  $w$  der Staubteilchen auf ihrem Wege von der Sprühelektrode zur Wand abhängt:

$$(2) \quad \eta = \frac{n_0 - n}{n_0} = 1 - e^{-\frac{2w l}{R V}}.$$

Indem man  $\eta$  und  $V$  mißt, könnte man daher  $w$ , die wahre Wanderungsgeschwindigkeit der Teilchen, bestimmen. In dieser Formel bedeutet jedoch  $w$  nur die Wanderungsgeschwindigkeit *am Rande* des Filters, so daß deren Bestimmung die vorliegende Frage nach der durchschnittlichen Geschwindigkeit der Teilchen im Filter nicht entscheiden kann. Diese Bedeutung von  $w$  geht bereits aus der ursprünglichen Ableitung der Formel von Deutsch (a. a. O.) hervor. Einwandfrei ist die folgende Überlegung, die ich Hrn. E. P. Adams verdanke: betrachtet man den stationären Zustand, in dem sich die Dichte  $n$  der Teilchen an einer bestimmten Stelle der zylindrischen Kammer nicht ändert, indem ebensoviel Teilchen in radialer Richtung ( $r$ ) herauswandern als in axialer Richtung ( $z$ ) vom Gasstrom mit der Geschwindigkeit  $z$  zugeführt werden, so ist

$$\frac{\partial}{\partial r} (n w r) + \frac{\partial}{\partial z} (n V r) = 0,$$

ganz unabhängig davon, welches die treibenden Kräfte sind, also bei konstantem  $V$

$$n w + r \frac{\partial}{\partial r} (n w) = - r V \frac{\partial n}{\partial z}$$

und für  $r = R$ , d. h. am Rande des Filters

$$- R V \left( \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial z} \right)_{r=R} = w_R + R \left[ \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial r} (n w) \right]_{r=R}.$$

Wenn

$$\left( \frac{\partial n}{\partial r} \right)_R = 0 \quad \text{und zugleich} \quad \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)_R = \frac{w_R}{R}$$

folgt

$$\frac{\partial}{\partial r} (n w) = \frac{n}{R} w_R \quad \text{und} \quad \left( \frac{\partial n}{\partial z} \right)_{r=R} = - \frac{2 w_R n}{R V},$$

1) W. Deutsch, *Ann. d. Phys.* **68**. S. 335. 1922, speziell S. 343; vgl. auch *Ztschr. f. techn. Phys.*, a. a. O. **6**. S. 423. 1925.

also

$$(2a) \quad n_{z=l} = n_0 e^{-\frac{2w_R l}{R V}}.$$

Wenn aber

$$\left[ \frac{\partial (n w)}{\partial r} \right]_R = 0,$$

folgt

$$(2b) \quad n_{z=l} = n_0 e^{-\frac{w_R l}{R V}}.$$

Ohne weiteres ist nicht zu entscheiden, welche der beiden Randbedingungen und ob eine von ihnen den tatsächlichen Vorgängen entspricht. Experimentell ist durch Deutsch<sup>1)</sup> und besonders durch neue Versuche von Seeliger und Mierdel<sup>2)</sup> im Forschungslaboratorium der S.S.W. die durch diese Formel dargestellte Abhängigkeit des Reinigungsgrades eines Filters von Rohrlänge, Radius und Gasgeschwindigkeit bestätigt worden. Bei den letztgenannten Versuchen ergab sich für Teilchen von  $10^{-3}$  cm Größe und bei einem Strom von 1,6 mA pro Meter Draht die aus Formel (2a) berechnete Geschwindigkeit  $w_R$  zu über 100 cm/sec, aus Formel (2b) würde der doppelte Wert folgen. Die Größenordnung stimmt mit den Geschwindigkeiten überein, die man nach den Darlegungen von E.G.R.I im Innern des Filters bei Feldstärken von 3000 Volt/cm erwarten sollte. Allerdings lassen solche Bestimmungen von  $w_R$ , die nur über die Vorgänge nahe der Wand etwas aussagen, ohne weiteres keinen Schluß auf die treibenden Kräfte zu.<sup>3)</sup>

### Zusammenfassung

Die Diskussion der Vorgänge bei der elektrischen Gasreinigung in zylindrischen Elektrofiltern ergibt folgendes: Schwebeteilchen über  $10^{-4}$  cm Größe erhalten allein durch ihre Ladung und durch die Wirkung des elektrischen Feldes der Coronaentladung radiale, ihrer Größe proportionale Geschwindigkeiten, die zum Verständnis der Wirksamkeit der Filter genügen; Teilchen unter  $10^{-4}$  cm Größe erhalten auf diese Weise Geschwindigkeiten von nur 1,4—3 cm/sec, sie spielen aber technisch meist nur eine untergeordnete Rolle.

1) W. Deutsch, *Ztschr. f. techn. Phys.* 6. S. 423. 1925.

2) R. Seeliger u. G. Mierdel, *Naturwiss.* 19. S. 753. 1931.

3) Dies gilt ebenso für die von Deutsch aus technischen Daten [nach Formel (2a)] berechneten Geschwindigkeiten (*Ztschr. f. techn. Phys.* 6. S. 423. 1925), zumal dort die Teilchengröße nicht bekannt ist.



Der elektrische Wind, der von den Glimmpunkten der Sprühelektroden zu den Niederschlags Elektroden hinströmt, erteilt unter den Bedingungen im Elektrofilter dem Gas und den in ihm schwebenden Teilchen zwar zusätzliche Geschwindigkeiten von 20—60 cm/sec. Aber die bei den früheren Betrachtungen nicht in Rechnung gestellte axiale Strömung des Gases verringert, wenn sie mehr als  $1/2$  m/sec beträgt, die die Abscheidung fördernde Wirkung des E. W., indem sie die Staubteilchen den zur Wand hin gerichteten Ionen-, d. h. den Windstrahlen entführen und in Rückströmungen bringen kann; immerhin bleibt in der Mehrzahl der Fälle eine fördernde Wirkung des Windes bestehen, da ein Teilchen dort, wo es aufgeladen wird, zugleich in einen zur Wand hin gerichteten Windstrahl gelangt. Außerdem führen jene Rückströmungen die Staubteilchen immer wieder den Ionenströmen zu und fördern dadurch indirekt deren Aufladung und Abscheidung.

Die von Deutsch aufgestellte Exponentialformel für den Reinigungsgrad eines Filters

$$\eta = \frac{n_0 - n}{n_0} = 1 - e^{-\frac{2w l}{R V}}$$

erlaubt bei Messung dieses Reinigungsgrades in einem Filter von gegebener Länge  $l$  und gegebenem Radius  $R$  und bei bestimmter axialer Gasgeschwindigkeit  $V$  zwar die radiale Wanderungsgeschwindigkeit  $w$  der Teilchen zu bestimmen, doch bezieht sich diese Geschwindigkeit  $w$ , wie die Ableitung der Formel lehrt, nur auf die Teilchen am Rande des Filters, und die Größe der so bestimmten Werte von  $w$  erlaubt ohne weiteres kein Urteil über die treibenden Kräfte und die Vorgänge bei der Gasreinigung.

Zur Zeit Princeton, N. J., 15. Februar 1932.

(Eingegangen 16. März 1932)



**Berichtigung zu der Arbeit:****Über die Variabilität der magnetischen Ionenmomente einiger Elemente der Eisenreihe<sup>1)</sup>****Von H. Fahlenbrach**

(Mit 1 Figur)

Hr. Dr. Auer-München hat mich freundlicherweise auf einen Fehler aufmerksam gemacht, der leider in der „Berechnung der Suszeptibilität des gelösten Salzes“ (S. 271, Ziffer 9) enthalten ist. Für diese Berechnung kommen nicht die bei der Messung maßgebenden Dichten  $\sigma$  und  $\sigma_a$  der Lösung in Frage, sondern die Dichte ( $\sigma_a'$ ), die die Lösung bei Ausführung der Konzentrationsbestimmung hatte, also bei Zimmertemperatur. In der letzten Formel auf S. 271 ist diese Dichte  $\sigma_a'$  an Stelle von  $\sigma$  einzusetzen:

$$\chi_s = \frac{100}{p'} \cdot \sigma_a' (\chi_L - \chi_{L.M.}) + \chi_{L.M.}$$

Alle Messungen an Lösungen, die nicht bei Zimmertemperatur gemacht sind, bedürfen daher der Neuberechnung (nicht dagegen die Messungen an den reinen Lösungsmitteln!).

Die Umrechnung konnte auf folgendem Wege vorgenommen werden: Für jede Lösung wurde ein Wert der fehlerhaft berechneten  $\frac{1}{\chi} - T$ -Geraden mit Hilfe des Dichteverhältnisses  $\sigma_a'/\sigma$  korrigiert, und mit diesem und dem unveränderten Wert der Geraden für Zimmertemperatur wurden die Konstanten einer neuen Geraden berechnet. Im folgenden sind die so berichtigten Werte für  $M$  (Zahl Weisscher Magnetonen) und  $\Theta$  den alten Werten (eingeklammert) gegenübergestellt:

Zitat aus alter Arbeit	$M$		$\Theta$ in $^{\circ}K$	
	NiCl <sub>2</sub> in H <sub>2</sub> O			
Fig. 6, S. 275	15,5	(14,8)	16	(40)
Fig. 7, Tab. 3, S. 276	15,5	(14,9)	15	(40)
	16,9	(16,1) <sup>2)</sup>	- 40	(-11)
	19,5	(18,5)	-114	(-71)

1) H. Fahlenbrach, Ann. d. Phys. [5] **13**, S. 265, 1932.

2) In der alten Arbeit stand hier infolge eines Versehens 16,7.

Zitat aus alter Arbeit	M		$\Theta$ in $^{\circ}K$	
NiCl <sub>2</sub> in H <sub>2</sub> O				
Fig. 8, S. 277	15,1	(14,5)	19	—
	17,5	(16,7)	— 64	—
S 277, Zeile 13	15,4	(14,8)	19	—
CoCl <sub>2</sub> (a) in H <sub>2</sub> O				
Figg. 9 und 10	22,5	(21,4)	42	(67)
Tab. 4, S. 278—279	22,5	(21,4)	40	(64)
	23,0	(21,9)	36	(61)
	24,2	(23,0)	11	(48)
	25,6	(24,4)	— 22	(15,5)
	31,0	(28,6)	— 144	(— 86)
	34,2	(31,1)	— 238	(— 145)
Lösungsreihe 5, Tab. 4, S. 279	26,1	(24,9)	— 45	(— 11)
	26,5	(25,2)	— 50	(— 13)
	27,4	(25,9)	— 58	(— 19)
	28,5	(26,7)	— 93	(— 39)
	30,4	(28,3)	— 133	(— 67)
	36,7	(32,8)	— 353	(— 221)
S. 280, Zeile 4 von unten	26,4	(25,0)	— 53	(— 13)
Fig. 18, S. 287: $U_4$	23,0	(21,8)	14	—
$U_1$	21,8	(20,8)	61	—
$U_2$	21,7	(20,8)	57	—
CoCl <sub>2</sub> (b) in H <sub>2</sub> O				
Figg. 12 und 13 I	22,1	(21,0)	44	—
Fig. 13 II	23,7	(22,5)	14	—
III	24,2	(22,9)	6	—
FeCl <sub>3</sub> in H <sub>2</sub> O				
Fig. 14, S. 283	28,1	(26,75)	$\left\{ \begin{array}{l} 26 \\ 25 \\ 24 \\ 11 \end{array} \right.$	$\left( \begin{array}{l} 55 \\ 54,5 \\ 53 \\ 42,5 \end{array} \right)$
CoCl <sub>2</sub> in Pyridin				
Fig. 15 und 19, blau:	20,4	(18,0)	79	—
	22,1	(19,4)	48	—
	24,1	(20,8)	— 4	—
	26,2	(22,4)	— 42	—
rot: I	27,0	(25)	— 82	—
II			— 65	—
III			— 68	—
IV			— 86	—
CoCl <sub>2</sub> in Äthylalkohol				
Fig. 16, S. 285:	I	22,5 (19,03)	10	—
	II	22,6 (19,08)	15	—
	III	22,6 (19,08)	21	—
	IV	22,5 (18,96)	24	—
	V	22,5 (18,94)	35	—
	VI	22,5 (18,93)	39	—

Trotz den z. T. beträchtlichen Änderungen der Absolutwerte nach der Umrechnung bleibt doch das Bild der Variabilitäten von  $M$  und  $\Theta$  mit der Konzentration und den Auflösungsbedingungen qualitativ vollkommen erhalten. Als Beispiel diene die Fig. 1, die die Berichtigung der alten Fig. 20 (S. 291)

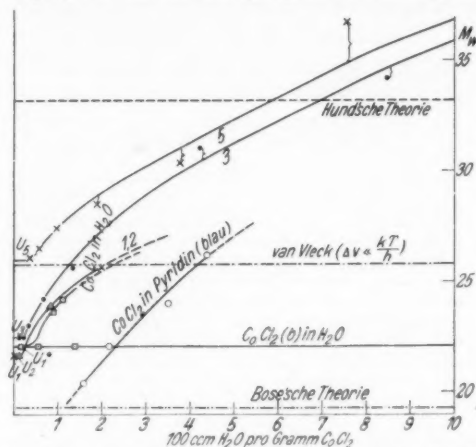


Fig. 1. Momente von  $\text{Co}^{++}$  in Abhängigkeit von der Verdünnung

darstellt. Allerdings wird jetzt bei den größten Verdünnungen der Hundsche Wert von  $\text{Co}^{++}$  überschritten, wobei freilich noch einmal auf die mit zunehmender Verdünnung wachsende Unsicherheit der Messungen hingewiesen sei, die diese Überschreitung nicht als unbedingt sicher erscheinen läßt.

Der neue Wert für das konzentrationsunabhängige  $\text{Ni}^{++}$ -Moment: 15,5 stimmt besser zu dem von Cabrera und Dupérier gefundenen 16,0 (vgl. S. 275). Ferner verschwindet jetzt die (Ziffer 24) besprochene Diskrepanz für  $\text{CoCl}_2$  in Äthylalkohol gegenüber dem Befund von Chatillon (23 W.M.). Sehr befriedigend ist weiter, daß der richtige Wert für  $\text{Fe}^{++}$ : 28,1 mehr an den gemeinsamen Wert 29 gerückt ist, den die drei Theorien für dieses Ion ergeben, und daß endlich die (Ziffer 30) besprochene Unterschreitung des Bosewertes durch  $\text{CoCl}_2$  in Äthylalkohol und besonders in Pyridin nunmehr wegfällt und damit auch die Annahme eines Übergangs zu Durchdringungskomplexen in diesen Lösungen sich erübrigt.

(Eingegangen 16. Juni 1932)

**Über eine Konzentrationsabhängigkeit  
des Magnetismus von  $\text{Cr}^{+++}$  in wäßriger,  
violetter  $\text{Cr}(\text{NO}_3)_3$ -Lösung.  
Beziehung zwischen den Konstanten  $C$  und  $\Theta$   
des Weiss'schen Gesetzes**

**Von H. Fahlenbrach**

(Mit 5 Figuren)

Als Ergänzung zu einer schon früher erschienenen Arbeit wird gezeigt, daß eine Konzentrationsabhängigkeit des magnetischen Moments von  $\text{Cr}^{+++}$  entgegengesetzte Richtung wie von  $\text{Co}^{++}$  und  $\text{Ni}^{++}$  hat. Daher scheint auch hier folgende Erklärung möglich. Bei stärkeren Konzentrationen bilden sich Anlagerungskomplexe mit den Anionen; das magnetische Ionenmoment ist wenig von dem Werte der Boseschen Theorie verschieden. Mit wachsender Verdünnung (freie Ionen) nähert sich das Ionenmoment dem Werte der Hundschen Theorie. Auf Grund des gesamten bisher ermittelten experimentellen Materials (Ionen der Eisenreihe) wird der Zusammenhang zwischen  $\Theta$  und  $M^2$  dargestellt.

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> konnte gezeigt werden, daß die Konzentrationsabhängigkeit der magnetischen Ionenmomente von Co und Ni durch die Stonersche Deutung<sup>2)</sup> der Boseschen und der Hundschen Theorie erklärt werden kann. Bei starker Konzentration (starker Wechselwirkung mit den Anionen) nähern sich die experimentell bestimmten Ionenmomente dem Bosewert, mit wachsender Verdünnung (freie Ionen) scheinen sie den Werten der Hundschen Theorie zuzustreben. Bei den Elementen der zweiten Hälfte der Eisenreihe (Elektronenzahl 24—28), darunter auch  $\text{Co}^{++}$  und  $\text{Ni}^{++}$ , sind die Hundschen Werte größer als die Boseschen, in der ersten Hälfte (Elektronenzahl 18—22) kleiner; bei 23 Elektronen (z. B.  $\text{Fe}^{+++}$ ) stimmen beide Theorien überein (vgl. Fig. 4 S. 529). Wenn also obige Erklärung zuträfe, so sollte  $\text{Fe}^{+++}$  ein konzentrationsunabhängiges Moment haben (das wurde a. a. O. in der Tat bestätigt); die Konzentrationsabhängigkeit des  $\text{Cr}^{+++}$  (Elektronenzahl 21) müßte dagegen gerade umgekehrt sein wie bei  $\text{Co}^{++}$  und  $\text{Ni}^{++}$ . So schien die Untersuchung einer etwaigen

1) H. Fahlenbrach, *Ann. d. Phys.* [5] 13. S. 265. 1932. Im folgenden a. a. O.

2) E. C. Stoner, *Phil. Mag.* S. VII. S. 250. 1929.

H. Fal

Konze  
Cr<sup>+++</sup>

Z

Lösun

stes P

Kahl

Konze

Lösun

im hi

misch

gravim

Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub>

Die r

Meßm

der

Unte

sind

führte

gehen

ben w

Ergän

hier A

Quelle

nutzte

für d

lare S

tät de

Z<sub>A</sub> = -

I

rigkei

gnetis

such

Chron

gen h

denen

turen

gende

im

drei v

Salze

ein v

versch

I

S. 122

Konzentrationsabhängigkeit des magnetischen Moments von  $\text{Cr}^{+++}$  von entscheidender Bedeutung.

Zur Untersuchung gelangten wäßrige  $\text{Cr}(\text{NO}_3)_3$  (violett)-Lösungen verschiedener Konzentrationen. Das Salz war reines Präparat von Kahlbaum. Die Konzentration der Lösungen wurde im hiesigen chemischen Institut gravimetrisch als  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  bestimmt. Die magnetische Meßmethodik und der Gang der

Untersuchung sind am angeführten Orte eingehend beschrieben worden. Als Ergänzung genügt hier Angabe und Quelle des benutzten Wertes für die molekulare Suszeptibilität des  $\text{NO}_3$ -Ions:  $\chi_A = -18 \cdot 10^{-6}$ .<sup>1)</sup>

Die Schwierigkeiten der magnetischen Untersuchung von Chromisalzlösungen bei verschiedenen Temperaturen sind folgende: Es gibt im allgemeinen drei verschiedene Salze (Isomere), ein violettes und zwei grüne. Ihr Unterschied liegt in einer verschiedenen Komplexbildung mit den Kristallwassermolekülen.

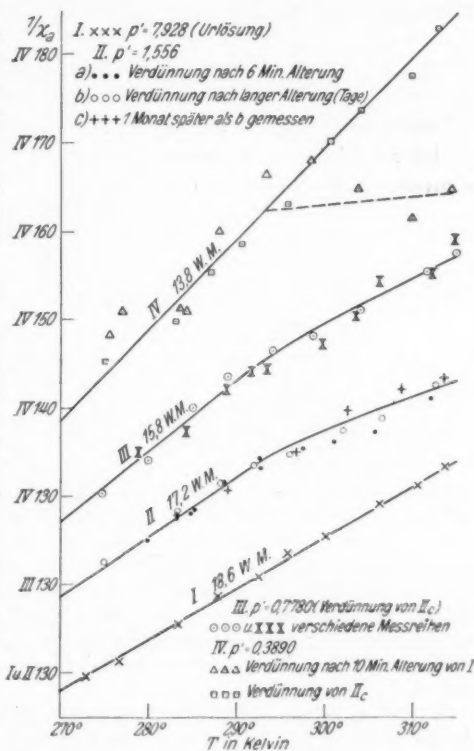


Fig. 1. Temperaturabhängigkeit von  $1/\chi_{\text{Cr}^{+++}}$  bei verschiedenen Konzentrationen (verschobene Ordinate)

<sup>1)</sup> E. C. Stoner, Magnetism and Atomic Structure. London 1926. S. 122.

In der Lösung ist es schwierig, eine der drei Formen über ein größeres Temperaturintervall rein zu erhalten. Es wurde deshalb das Temperaturintervall der Beobachtung auf den Bereich von 0—40° C beschränkt und das violette Nitrat gewählt, da mir dieses von chemischer Seite Temperatureinflüssen gegenüber als am beständigsten empfohlen wurde. Eine eventuelle

Temperaturabhängigkeit von  $1/\chi_{Cr+++}$   
bei verschiedenen Konzentrationen  
(Kurven in ihrer richtigen Lage zueinander)

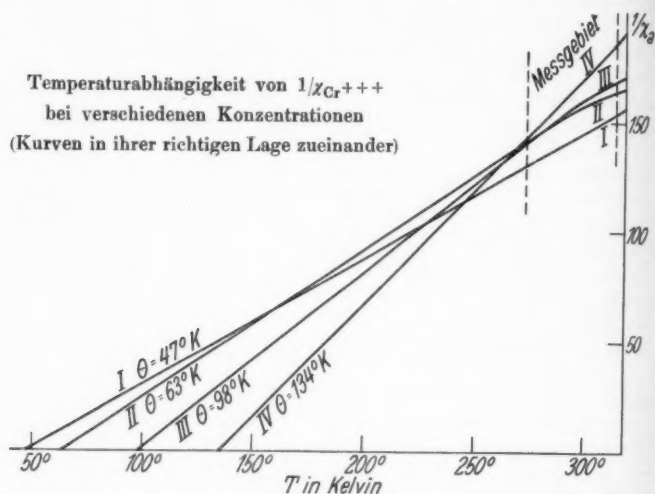


Fig. 2

Umwandlung muß sich noch dazu im  $(1/\chi; T)$ -Diagramm durch eine Krümmung bemerkbar machen, sofern wenigstens die verschiedenen Komplexe auch verschiedene magnetische Momente haben.

Die experimentellen Resultate geben Figg. 1 und 2 in der heute meist üblichen Form  $(1/\chi; T)$  an; bei der Berechnung der  $\chi$  wurde die Berichtigung<sup>1)</sup> berücksichtigt, deren die ursprünglich (a. a. O.) angegebene Rechnungsweise bedarf. In Fig. 1 sind die Kurven zur besseren Übersicht über die Streuung der Meßpunkte durch Verschiebung längs der Ordinaten gegenüber ihrer richtigen Lage auseinandergezogen. Die Ordinaten 130 sind für jede Gerade markiert.  $p'$ , die Konzentration, ist in Gramm Salz pro 100 cm<sup>3</sup> Lösung angegeben. Fig. 2 gibt die

1) H. Fahlenbrach, *Ann. d. Phys.* [5] 14. S. 521. 1932.

Kurven in ihrer richtigen Lage zueinander und gestattet die Veränderung der  $\Theta$ -Werte zu übersehen.

1. Der Temperaturverlauf scheint wenigstens stückweise geradlinig zu sein. Da die Arbeit aus äußeren Gründen einen Abschluß erforderte, konnte auf das Studium der Übergänge von den violetten zu den grünen Komplexen nicht näher eingegangen werden. In Figg. 1 und 2 scheinen sie sich bei II, III und IV um ungefähr  $+20^\circ \text{C}$  durch Knicke oder gebogene Kurvenstücke bemerkbar zu machen. Interessant ist die Untersuchung von IV, wo einmal die Beobachtungspunkte oberhalb  $20^\circ \text{C}$  von der Geraden stark abfallen, bei einer zweiten Untersuchung mit einer neuen Lösung gleicher Konzentration die Geradlinigkeit noch bis  $+40^\circ \text{C}$  erhalten bleibt. Andererseits ist aber hier schon wegen der geringen Konzentration die Genauigkeit sehr klein. Die Verschiedenheit der beiden Untersuchungen an IV könnte durch einen Alterungseffekt hervorgerufen sein. In der Tat zeigt sich eine ähnliche Abweichung bei II. Auch hier wandern in der oberen Hälfte der Kurve die Meßpunkte mit steigender Alterung nach oben. Bei III konnte der Effekt nicht auftreten, da frische Lösungen dieser Konzentration nicht untersucht worden sind. Zur Bestimmung der Momente soll von II und III der untere geradlinige Teil benutzt werden, da dort mit einiger Sicherheit angenommen werden kann, daß man die violetten Komplexe rein hat. Selbst wenn man, was den Tatsachen nicht zu entsprechen scheint, durch alle Meßpunkte von II und III je eine Gerade legt, so ändert auch das das qualitative Bild der Fig. 3 nicht wesentlich.

2. Auch  $\text{Cr}^{+++}$  in wäßrigen Lösungen zeigt eine, bisher meines Wissens noch nicht gefundene, Konzentrationsabhängigkeit des magnetischen Moments. Cabrera und Marquina<sup>1)</sup> fanden bei ihren umfangreichen magnetischen Untersuchungen

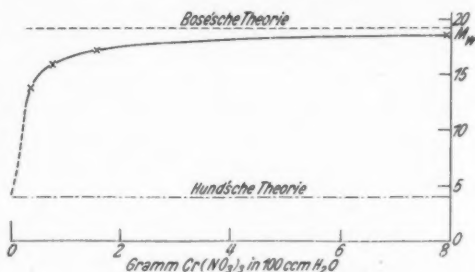


Fig. 3. Abhängigkeit des magnetischen Moments von  $\text{Cr}^{+++}$  von der Konzentration

1) B. Cabrera u. M. Marquina, An. Fis. Quim. 15. S. 199. 1917.



bei Zimmertemperatur für wäßrige Lösungen violetter wie auch grüner Chromisalze annähernd Konzentrationsunabhängigkeit. Nach dem von mir (a. a. O.) für  $\text{Co}^{++}$  und  $\text{Ni}^{++}$  Gefundenen braucht das nicht zu meinem Ergebnis in Widerspruch zu stehen. Eine Verschiedenheit der Auflösungsbedingungen kann verschiedene Konzentrationsabhängigkeit zur Folge haben. Da Cabrera und Marquina durchweg stärkere Urlösungskonzentrationen verwandt haben, wäre eine Konzentrationsunabhängigkeit in Analogie zu Kobalt und Nickel verständlich.

3. Die Konzentrationsabhängigkeit der  $(1/\chi; T)$ -Geraden für  $\text{Cr}^{+++}$  hat in der Tat einen entgegengesetzten Sinn wie bei  $\text{Co}^{++}$  und  $\text{Ni}^{++}$ . Bei Zimmertemperatur etwa erhält man für  $\text{Cr}^{+++}$  mit wachsender Konzentration wachsende Suszeptibilitäten; für  $\text{Co}^{++}$  und  $\text{Ni}^{++}$  fand ich einen umgekehrten Verlauf (a. a. O. Figg. 7 und 10). Das Wesentlichste, die Neigungsänderung (Änderung des magnetischen Moments) der  $(1/\chi; T)$ -Geraden für  $\text{Cr}^{+++}$ , hat ebenfalls den entgegengesetzten Sinn wie für  $\text{Co}^{++}$  und  $\text{Ni}^{++}$ . Für  $\text{Cr}^{+++}$  werden die Geraden mit wachsender Verdünnung steiler.

4. Der Vorgang der Konzentrationsabhängigkeit scheint sich wieder zwischen den Werten der Hundschen und der Boseschen Theorie abzuspielen (vgl. Fig. 3). Das Grenzmoment für große Konzentrationen betrug 18,6 Weiss'sche Magnetonen, wenig unterhalb des Werts der Boseschen Theorie (19,3 W.M.). Cabrera und Marquinas<sup>1)</sup> Wert (Konzentrationsunabhängigkeit) von 19 W. M. kommt dem Bosewert noch näher. Leider fehlt aber bei ihnen noch die Bestimmung des Temperaturverlaufs. Doch ist nach meinen Beobachtungen in diesem Falle der  $\Theta$ -Wert nicht allzu groß. Nach stärkeren Verdünnungen nimmt das Moment ab und könnte dem Verlauf der Kurve (Fig. 3) nach bei unendlicher Verdünnung den Hundschen Wert erreichen. Leider ist meine Versuchsanordnung nicht geeignet, die Untersuchung verdünnter Lösungen hinreichend weit treiben zu können und eine sichere Extrapolation auf den Hundschen Wert zu ermöglichen, so wenig wie das bei  $\text{Ni}^{++}$  der Fall war. Aber jedenfalls zeigen meine Ergebnisse über das  $\text{Cr}^{+++}$ , daß in der angegebenen quantentheoretischen Richtung eine Lösung der lange Zeit ungeklärten Frage der Begründung der Konzentrationsabhängigkeit des magnetischen Ionenmoments in der Eisenreihe möglich ist. Fig. 4 gibt einen Überblick über meine gesamten Ergebnisse zu dieser Frage

1) B. Cabrera u. M. Marquina, a. a. O.

[nach c  
richtig  
Übersch  
der Mel  
heit b  
Verdünn  
nicht  
gesiche  
sehen.

Da  
sikalisc  
tung d  
des W  
Gesetz  
Überg  
sitiven  
gativen  
höchst  
wird u  
ders di  
gativen  
bisher  
unerk  
trägt e  
zur A  
ihrer M  
wenn r  
Zusamm  
Collet  
schen 2  
nähert  
und C  
fand ic  
der Eis  
rität z  
Näheru  
Gerade  
punkt  
gerade  
Momen

[nach der berichtigten<sup>1)</sup> Formel berechnet]; sie stellt Berichtigung und Ergänzung von Fig. 21 (a. a. O.) dar. Die Überschreitung des Hund'schen Wertes bei  $\text{CoCl}_2$  ist wegen der Meßunsicherheit bei hoher Verdünnung als nicht unbedingt gesichert anzusehen.

Da die physikalische Bedeutung der Größe  $\Theta$  des Weiss'schen Gesetzes beim Übergang von positiven zu negativen Werten höchst dunkel wird und besonders die stark negativen  $\Theta$ -Werte bisher theoretisch unerklärt sind, trägt es vielleicht zur Aufklärung ihrer Natur bei, wenn man ihren

Zusammenhang mit anderen, anschaulichen Größen sucht. Collet und Foëx<sup>2)</sup> haben schon für die verschiedenen magnetischen Zustände des Mohr'schen Salzes und des Platins angenähert eine lineare Beziehung zwischen den beiden Konstanten  $\Theta$  und  $C$  des Weiss'schen Gesetzes gefunden. Ähnliche Beziehungen fand ich für die von mir bisher in Lösungen untersuchten Ionen der Eisenreihe  $\text{Co}^{++}$ ,  $\text{Ni}^{++}$  und  $\text{Cr}^{+++}$  (vgl. Fig. 5). Die Linearität zwischen  $\Theta$  und  $M^2$  kann auch hier nur eine erste Näherung sein, es müßten bei strenger Linearität sämtliche Geraden im  $1/\chi; T$ -Diagramm durch einen gemeinsamen Schnittpunkt gehen. Daß dieses nicht überall der Fall ist, ermöglicht gerade das Verständnis der charakteristischen Cabrerascen Momentkonzentrationskurven des  $\text{Co}^{++}$ .<sup>3)</sup> Deshalb sind auch in

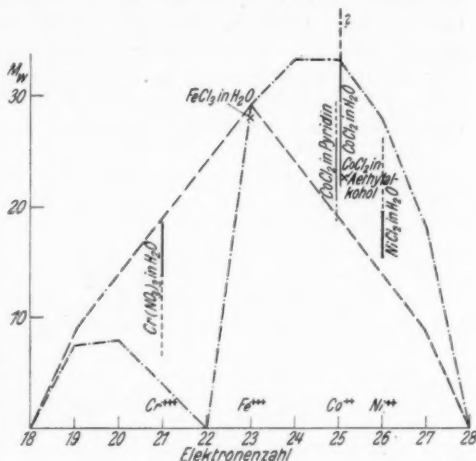


Fig. 4. Die theoretischen und experimentellen Ionenmomente in der Eisenreihe.  
 - - - - Hund ( $4,97 \cdot g \sqrt{j(j+1)}$ )  
 - - - - Bose ( $4,97 \sqrt{s(s+1)}$ )

1) H. Fahlenbrach, Ann. d. Phys. [5] 14. S. 521. 1932.

2) P. Collet u. G. Foëx, Journ. d. Phys. 2. S. 290. 1931.

3) H. Fahlenbrach, a. a. O. Fig. 22.

Fig. 5 Streckenzüge durch zusammengehörige Meßpunkte gelegt, um schon äußerlich darzutun, daß die Abweichungen von der Linearität nicht zufällig sind. Auffallend erscheint die Tatsache, daß auch für  $\text{Cr}^{+++}$ , wo der Einfluß der Verdünnung auf  $M$  und  $\Theta$  sich umkehrt, derselbe Zusammenhang zwischen  $\Theta$  und  $M$  besteht. Die Richtung wachsender Konzentration ist hier natürlich entgegengesetzt. Interessant ist vor allem, daß nicht nur die beiden Lösungsreihen 3 und 5 für  $\text{CoCl}_2(a)$  in  $\text{H}_2\text{O}$ , die sich magnetisch sonst ganz verschieden verhalten,

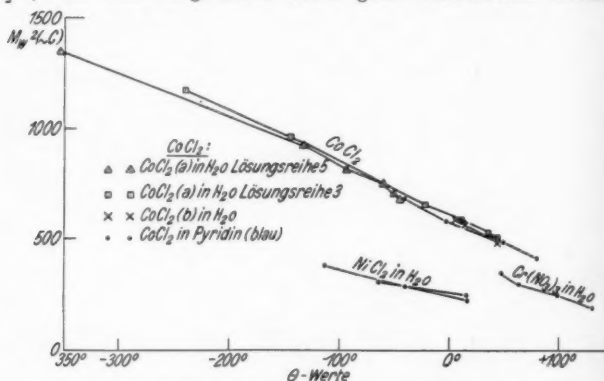


Fig. 5.  $\Theta$ - $M$ -Beziehung von Ionen der Eisenreihe

hier in eine Gerade zusammenzufallen scheinen, sondern, daß auch  $\text{CoCl}_2$  in Pyridin und  $\text{CoCl}_2(b)$  sich in denselben linearen Zusammenhang einordnen. Für ein bestimmtes Salz scheint danach ein ganz bestimmter  $\Theta$ - $M$ -Zusammenhang charakteristisch zu sein. Die verschiedenen Modifikationen des Salzes ändern diesen Zusammenhang nicht. (Die Bezeichnungen der Fig. 4 sind die gleichen wie in der schon häufig zitierten Arbeit, a. a. O.).

Zu danken habe ich der Helmholtzgesellschaft für den zur Verfügung gestellten Elektromagneten, der Firma Leitz, Wetzlar für Mikroskop und Mikrometerschraube, den Herren Prof. Grüneisen und Privatdozenten Dr. Vogt für ihr stets förderndes Interesse.

Marburg (Lahn), Physikalisches Institut.

(Eingegangen 24. April 1932)

Chr. Me

Zur T

Es  
harter  
Quanten  
physikal  
schnell  
sowie B  
lassen  
Atomen  
praktisc  
erforden  
tivistisc  
konsequ  
sich vo  
nerung  
vorliege  
erhalten

Es  
und c  
digkeit  
zuführen  
und da  
mit ver  
Fällen  
Theorie  
quantum

Die  
Jahren  
ein, in  
gleichu  
schreib  
nämlich  
schwind

1)

## Zur Theorie des Durchgangs schneller Elektronen durch Materie

Von Chr. Møller

### Einleitung

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit den Durchgang harter  $\beta$ -Strahlen durch Materie in Übereinstimmung mit der Quantentheorie und der Relativitätstheorie zu behandeln. Alle physikalischen Erscheinungen, welche mit dem Durchgang von schnell bewegten Elektronen durch Materie verknüpft sind, sowie Bremsung, Streuung, Ionisation und Anregung der Atome lassen sich auf die Wechselwirkung der Elektronen mit den Atomen zurückführen, die Strahlungskräfte dagegen spielen praktisch keine Rolle. Eine Theorie dieser Erscheinungen erfordert daher eine quantentheoretische Behandlung des relativistischen Mehrkörperproblems. Zur Zeit gibt es noch keine konsequente allgemeine Theorie dieses Problems und man muß sich vorläufig damit begnügen durch sinngemäße Verallgemeinerung der nichtrelativistischen Theorie eine für das gerade vorliegende Problem geeignete approximative Behandlung zu erhalten.

Es handelt sich offenbar darum die beiden Konstanten  $h$  und  $c$  — die Plancksche Konstante und die Lichtgeschwindigkeit — in sinngemäßer Weise in die Rechnungen einzuführen, und je nachdem man erst  $c$  und dann  $h$  oder erst  $h$  und dann  $c$  einführt, erhält man zwei verschiedene Methoden mit verschiedenen Gültigkeitsgebieten, die sich in gewissen Fällen auch teilweise überdecken können. In einer allgemeinen Theorie werden natürlich  $h$  und  $c$  und wohl auch das Elementarquantum  $e$  und der „Elektronenradius“ gleichzeitig auftreten.

Die erste der erwähnten Methoden ist schon vor einigen Jahren von Breit<sup>1)</sup> ausgearbeitet worden. Breit führt erst  $c$  ein, indem er die *klassischen* relativistischen Bewegungsgleichungen des Zweikörperproblems in Hamiltonscher Form schreibt. Das ist bekanntlich nur in einem gewissen Umfang nämlich bis auf Glieder der Ordnung  $(v/c)^2$  möglich ( $v$  = Geschwindigkeit der Teilchen). Sodann führt er nach den all-

1) G. Breit, Phys. Rev. **34**. S. 553 (1929).

gemeinen Vorschriften der nichtrelativistischen Quantenmechanik das Wirkungsquantum ein.

Diese Methode ist für unsere Zwecke ungeeignet, weil die Geschwindigkeit harter  $\beta$ -Strahlen so groß ist, daß man sich nicht mit Gliedern der Ordnung  $(v/c)^2$  begnügen kann. In einer früheren Arbeit des Verf.s<sup>1)</sup> über die Streuung schneller Elektronen wurde daher eine andere Methode vorgeschlagen, in welcher erst  $h$  und dann  $c$  eingeführt wird. Diese Methode, auf deren Besprechung wir in § 1 ausführlich zurückkommen werden, ist später von Rosenfeld<sup>2)</sup> wesentlich verallgemeinert und auf andere Probleme angewandt worden. Sie gestattet auch Effekte von höherer Ordnung als  $(v/c)^2$  zu berücksichtigen. Dagegen ist ihre Anwendbarkeit in anderer Hinsicht prinzipiell eingeschränkt. Es handelt sich nämlich um eine Näherungsmethode, bei der in nullter Näherung die beiden wechselwirkenden Systeme Atom und durchgehendes Elektron als vollständig getrennte Systeme behandelt werden. Sie entspricht also genau der Bornschen Methode in der nichtrelativistischen Theorie.

### § 1. Die theoretischen Grundlagen

Es handelt sich um das folgende Problem: ein Elektron mit vorgegebener Geschwindigkeit und Einfallsrichtung stößt auf ein Atom im Grundzustand; gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit der verschiedenen möglichen Elementarprozesse, wobei das Atom in einen angeregten Zustand übergeht und das einfallende Elektron eine Richtungs- und Geschwindigkeitsänderung erfährt. Diese Wahrscheinlichkeiten sind natürlich abhängig von der Art der Wechselwirkung zwischen dem Elektron und dem Atom. In der Bornschen Theorie des Elektronenstoßes wurde Coulombsche Wechselwirkung angenommen. In dem Gebiet, das uns hier interessiert, wo die Geschwindigkeit des Elektrons vergleichbar ist mit der Lichtgeschwindigkeit, muß man natürlich berücksichtigen, daß alle Kraftwirkungen nach der Relativitätstheorie sich nur mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten können. Weiter muß man auch die Spinwechselwirkung und die Veränderlichkeit der Masse mit der Geschwindigkeit in Betracht nehmen.

Da der Spin nach Dirac ein relativistisches Phänomen ist, das sich von selber ergibt, wenn man die Forderungen der Relativitätstheorie und diejenigen der Quantentheorie gleich-

1) Chr. Møller, *Ztschr. f. Phys.* **70**, S. 786. 1931.

2) L. Rosenfeld, *Ztschr. f. Phys.* **73**, S. 253 (1931).

zeitig erfüllen will, müssen wir erwarten, daß auch der Ausdruck für die Spinwechselwirkung automatisch herauskommt, wenn wir die Wechselwirkung in invarianter Weise formulieren. Das hier benutzte korrespondenzmäßige Verfahren zur Behandlung der Relativitätseffekte ist prinzipiell ein Näherungsverfahren, wo die Wechselwirkung zwischen dem Atom und dem einfallenden Elektron als Störung behandelt wird. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß das gestoßene Atom ein Wasserstoffatom ist mit einem praktisch unendlich schweren Kern im Ursprung unseres Koordinatensystems gelegen. Die Resultate lassen sich übrigens leicht auf kompliziertere Atome verallgemeinern. Zunächst vernachlässigen wir den Austausch der beiden Elektronen und bezeichnen alle Größen, die sich auf das stoßende Elektron beziehen mit dem Index 1 und diejenigen, welche sich auf das im Atom gebundene Elektron beziehen, mit dem Index 2. In nullter Näherung ist das stoßende Elektron frei, die Eigenzustände dieses Elektrons sind also repräsentiert durch die Eigenlösungen

$$(1) \quad \psi_{n_1} = \varphi_{n_1}(\mathbf{r}_1) e^{-i \omega_{n_1} t}, \quad \omega_{n_1} = \frac{2\pi}{h} E_{n_1}$$

der Diracschen Gleichung für ein freies Elektron. Die Größen  $\psi_{n_1}$  sind vierkomponentige Diracsche  $\psi$ -Funktionen,  $\mathbf{r}_1$  ist der Ortsvektor des Elektrons 1 und der Index  $n_1$  steht als Abkürzung für die verschiedenen Indizes, die zur Charakterisierung der Eigenzustände nötig sind.  $E_{n_1}$  ist die Energie des Zustandes  $n_1$ .

In derselben Näherung sind die Eigenzustände des Elektrons 2 durch die Diracschen Wasserstoffeigenfunktionen

$$(2) \quad \psi_{n_2} = \varphi_{n_2}(\mathbf{r}_2) e^{-i \omega_{n_2} t}$$

dargestellt. Die beiden Funktionensysteme von Eigenlösungen denken wir uns in gewöhnlicher Weise normiert und orthogonalisiert. Bei Vernachlässigung des Austausches und der Wechselwirkung zwischen Atom und Elektron 1 sind daher die stationären Zustände des totalen Systems Atom + Elektron 1 repräsentiert durch die Funktionen

$$(3) \quad \psi_{n_1 n_2} = \psi_{n_1} \cdot \psi_{n_2} = \varphi_{n_1}(\mathbf{r}_1) \cdot \varphi_{n_2}(\mathbf{r}_2) \cdot e^{-i(\omega_{n_1} + \omega_{n_2})t}$$

und ein willkürlicher Zustand  $\Psi$  des Totalsystems, kann durch eine Reihe der Form  $\Psi = \sum_{n_1 n_2} a_{n_1 n_2} \psi_{n_1} \psi_{n_2}$  dargestellt werden,

wo die  $a_{n_1 n_2}$  Konstante sind und die Summation über alle Eigenzustände zu erstrecken ist (bei kontinuierlichen Eigenwerten ist die Summation natürlich durch Integration zu ersetzen). Die Konstanten  $a_{n_1 n_2}$  haben folgende physikalische

Bedeutung:  $|a_{n_1 n_2}|^2$  gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß man bei einem Versuch das Totalsystem im Zustand  $(n_1 n_2)$  vorfindet. Wenn wir also mit Sicherheit wissen, daß das System im Zustand  $(m_1 m_2)$  ist, sind offenbar alle  $a_{n_1 n_2}$  gleich Null außer für  $n_1 = m_1$ ,  $n_2 = m_2$  und  $a_{m_1 m_2} = 1$ , also

$$(4) \quad a_{n_1 n_2} = \delta_{n_1 m_1} \cdot \delta_{n_2 m_2}, \quad \delta_{n m} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = m \\ 0 & \text{,, } n \neq m \end{cases}$$

Zur Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen Atom und Elektron 1 pflegt man jetzt so vorzugehen; man denkt sich die Wechselwirkung zu irgendeiner Zeit zum Beispiel für  $t = 0$  „eingeschaltet“. Zu dieser Zeit möge der Zustand durch  $a_{n_1 n_2} = a_{n_1 n_2}^0$  beschrieben sein. Für  $t > 0$  müssen dann die Koeffizienten  $a_{n_1 n_2}$ , wenn sie die obige physikalische Bedeutung beibehalten sollen, sich mit der Zeit ändern, da die Wechselwirkung eine Änderung des ursprünglichen Zustandes hervorrufen wird. Die Änderungen der Größen  $a_{n_1 n_2}$  werden nach der gewöhnlichen nichtrelativistischen Quantenmechanik durch die folgenden Gleichungen beschrieben

$$(5) \quad \begin{cases} -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{d a_{n_1 n_2}}{dt} = \sum_{m_1 m_2} (n_1 n_2 | U | m_1 m_2) a_{m_1 m_2} \\ \cdot e^{i(\omega_{n_1 m_1} + \omega_{n_2 m_2})t} = \sum_{m_1 m_2} (n_1 n_2 | U | m_1 m_2)^* a_{m_1 m_2}, \end{cases}$$

wo

$$(6) \quad \begin{cases} (n_1 n_2 | U | m_1 m_2)^* = (n_1 n_2 | U | m_1 m_2) e^{i(\omega_{n_1 m_1} + \omega_{n_2 m_2})t}, \\ \omega_{nm} = \frac{2\pi}{h} (E_n - E_m) \end{cases}$$

und  $(n_1 n_2 | U | m_1 m_2)$  das dem Übergang  $(m_1 m_2) \rightarrow (n_1 n_2)$  des Totalsystems entsprechende Matrixelement der Wechselwirkungsenergie bedeutet, also bei Coulombscher Wechselwirkung

$$(n_1 n_2 | U | m_1 m_2) = (n_1 n_2 | V_1 | m_1 m_2) + (n_1 n_2 | V | m_1 m_2)$$

mit

$$(7) \quad \begin{cases} (n_1 n_2 | V_1 | m_1 m_2) \\ = - \int \overline{\varphi_{n_1}(\mathbf{r}_1)} \overline{\varphi_{n_2}(\mathbf{r}_2)} \frac{e^2}{r_1} \varphi_{m_1}(\mathbf{r}_1) \varphi_{m_2}(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \\ = - \delta_{n_2 m_2} \int \overline{\varphi_{n_1}(\mathbf{r}_1)} \frac{e^2}{r_1} \varphi_{m_1}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \end{cases}$$

(letzteres wegen der Orthogonalität der Eigenfunktionen) und

$$(8) \quad \begin{cases} (n_1 n_2 | V | m_1 m_2) \\ = \int \overline{\varphi_{n_1}(\mathbf{r}_1)} \overline{\varphi_{n_2}(\mathbf{r}_2)} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \varphi_{m_1}(\mathbf{r}_1) \varphi_{m_2}(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \end{cases}$$



$d\tau_1, d\tau_2$  sind Volumenelemente im Konfigurationsraum der beiden Elektronen und die Integrationen sind über den ganzen sechsdimensionalen Konfigurationsraum des Totalsystems zu erstrecken. (7) stellt die Wechselwirkung zwischen Kern und Elektron 1 dar, während (8) die Wechselwirkung zwischen den beiden Elektronen repräsentiert.

Eine wesentliche Eigenschaft dieser Matricelemente ist ihre Hermitizität

$$(9) \quad (n_1 n_2 | U | m_1 m_2) = \overline{(m_1 m_2 | U | n_1 n_2)}$$

oder nach (6)

$$(9') \quad (n_1 n_2 | U | m_1 m_2)^* = \overline{(m_1 m_2 | U | n_1 n_2)^*}.$$

Diese Eigenschaft bewirkt nach (5), daß die Größe  $\sum_{n_1 n_2} |a_{n_1 n_2}|^2$  zeitlich konstant ist, was für die obige Deutung der Größen  $a_{n_1 n_2}$  notwendig ist. Mit Hilfe von (5), (9') und der zu (5) konjugiert komplexen Gleichung

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{d a_{n_1 n_2}}{dt} = \sum_{m_1 m_2} \overline{(n_1 n_2 | U | m_1 m_2)^*} a_{m_1 m_2}$$

erhält man nämlich in wohlbekannter Weise

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{n_1 n_2} |a_{n_1 n_2}|^2 &= \sum_{n_1 n_2} \left( a_{n_1 n_2} \frac{d a_{n_1 n_2}}{dt} + \overline{a_{n_1 n_2}} \frac{d \overline{a_{n_1 n_2}}}{dt} \right) \\ &= \frac{2\pi i}{h} \sum_{n_1 n_2 m_1 m_2} \{ a_{n_1 n_2} \overline{(n_1 n_2 | U | m_1 m_2)^*} a_{m_1 m_2} \\ &\quad - \overline{a_{m_1 m_2}} (n_1 n_2 | U | m_1 m_2)^* a_{n_1 n_2} \} \\ &= \frac{2\pi i}{h} \sum_{n_1 n_2 m_1 m_2} a_{n_1 n_2} \overline{a_{m_1 m_2}} [(n_1 n_2 | U | m_1 m_2)^* \\ &\quad - (m_1 m_2 | U | n_1 n_2)^*] = 0. \end{aligned}$$

Das Matricelement (8) der Wechselwirkung zwischen den beiden Elektronen hat außerdem die wesentliche Eigenschaft symmetrisch in den beiden Elektronen zu sein, d. h.

$$(10) \quad (n_1 n_2 | V | m_1 m_2) = (n_2 n_1 | V | m_2 m_1).$$

Diese Symmetrie ist bekanntlich dafür verantwortlich, daß die Coulombwechselwirkung bei Berücksichtigung des Austausches keine Übergänge zwischen den „symmetrischen“ und „antisymmetrischen“ Zuständen hervorruft.

Die beiden fundamentalen Eigenschaften (9) und (10) müssen natürlich erhalten bleiben, wenn wir dazu übergehen

allgemeinere relativistische Wechselwirkungen in Betracht zu ziehen.

Eine erste Näherung für die Änderung der Größen mit der Zeit erhalten wir jetzt, indem wir auf der rechten Seite von (5) für die  $a_{n_1 n_2}$  die Werte  $a_{n_1 n_2}^0$  zur Zeit  $t = 0$  einsetzen. War das System anfänglich im Zustand  $(m_1 m_2)$ , d. h.  $a_{n_1 n_2}^0$  von der Form (4) erhalten wir also in erster Näherung

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{d a_{n_1 n_2}}{dt} &= (n_1 n_2 | U | m_1 m_2)^* \\ &= (n_1 n_2 | U | m_1 m_2) e^{i(\omega_{n_1 m_1} + \omega_{n_2 m_2})t}. \end{aligned} \right.$$

Durch Integration mit Berücksichtigung von (6) und den Anfangsbedingungen

$$a_{n_1 n_2} = (n_1 n_2 | U | m_1 m_2) \frac{e^{-\frac{2\pi i}{\hbar}(E_{m_1} + E_{m_2} - E_{n_1} - E_{n_2})t} - 1}{E_{m_1} + E_{m_2} - E_{n_1} - E_{n_2}},$$

$$|a_{n_1 n_2}|^2 = |(n_1 n_2 | U | m_1 m_2)|^2 \cdot 2 \frac{1 - \cos \frac{2\pi}{\hbar} E t}{E^2},$$

$$E = E_{m_1} + E_{m_2} - E_{n_1} - E_{n_2}.$$

$\frac{d}{dt} |a_{n_1 n_2}|^2$  gibt uns dann zur Zeit  $t$  die Anzahl der Übergänge  $(m_1 m_2) \rightarrow (n_1 n_2)$  pro Sekunde. Wir erhalten also für diese Anzahl

$$\frac{d}{dt} |a_{n_1 n_2}|^2 = |(n_1 n_2 | U | m_1 m_2)|^2 \frac{4\pi}{\hbar} \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\hbar} E t\right)}{E}.$$

Wir interessieren uns nur für den Fall großer  $t$ , wo die Verhältnisse stationär geworden sind. Für große  $t$  erhält der

Faktor  $\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\hbar} E t\right)}{E}$  mehr und mehr den Charakter einer Diracschen Deltafunktion  $\delta(E)$ , der Null ist außer für  $E = 0$ .

Da  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$  ist, können wir also  $\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\hbar} E t\right)}{E}$  durch  $\pi \delta(E)$  ersetzen. Für die Wahrscheinlichkeit pro Sekunde eines Überganges  $(m_1 m_2) \rightarrow (n_1 n_2)$  ergibt sich dann

$$(12) \quad P = \frac{4\pi^2}{\hbar} \delta(E_{m_1} + E_{m_2} - E_{n_1} - E_{n_2}) \cdot |(n_1 n_2 | U | m_1 m_2)|^2.$$

Die Deltafunktion sorgt für die Erhaltung der Energie.

In der relativistischen Behandlung übernehmen wir die Gl. (11), wobei natürlich die „Matrizelemente“ auf der rechten Seite anders aussehen als im Coulombschen Fall. Die Wechselwirkung zerfällt noch immer in zwei Teile entsprechend den beiden Bestandteilen (7) und (8) in dem nichtrelativistischen Ausdruck. Der erste Teil, die Wechselwirkung zwischen Kern und Elektron 1, ist wieder durch (7) dargestellt, solange man den Kern als festes Kraftzentrum behandelt. Der zweite Teil, die Wechselwirkung zwischen den beiden Elektronen, wird dagegen wesentlich von (8) abweichen. Um einen plausiblen relativistischen Ansatz für

$$(n_1 n_2 | V | m_1 m_2)^* = (n_1 n_2 | V | m_1 m_2) e^{i(\omega_{n_1 m_1} + \omega_{n_2 m_2}) t}$$

zu erhalten, bilden wir die dem Übergang  $m_1 \rightarrow n_1$  des Elektrons 1 nach der Diracschen Theorie entsprechende Ladungs- und Stromdichte

$$(13) \quad \begin{cases} \rho^{(1)} = -e \bar{\psi}_{n_1} \psi_{m_1} = -e \bar{\varphi}_{n_1} \varphi_{m_1} \cdot e^{i\omega_{n_1 m_1} t}, \\ \mathfrak{J}^{(1)} = ec \bar{\psi}_{n_1} \alpha^{(1)} \psi_{m_1} = ec \bar{\varphi}_{n_1} \alpha^{(1)} \varphi_{m_1} e^{i\omega_{n_1 m_1} t}. \end{cases}$$

Die Komponenten des Vektors  $\alpha^{(1)}$  sind die Diracschen Strommatrizen. Dieser Ladungs- und Stromdichte entspricht nach der Maxwellschen Theorie ein skalares Potential  $\Phi^{(1)}$  und ein Vektorpotential  $\mathfrak{A}^{(1)}$ , die an der Stelle  $\mathbf{r}_2$  durch

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{r}_2) = \int \frac{[\rho^{(1)}(\mathbf{r}_1)]}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\mathbf{r}_1,$$

$$\mathfrak{A}^{(1)}(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathfrak{J}^{(1)}(\mathbf{r}_1)]}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\mathbf{r}_1$$

gegeben sind; die eckige Klammer soll andeuten, daß für  $\rho^{(1)}$  und  $\mathfrak{J}^{(1)}$  die retardierten Werte, d. h. die Werte zur Zeit  $t - \frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{c}$  einzusetzen sind. Unter Berücksichtigung von (13) erhalten wir so:

$$(14) \quad \begin{cases} \Phi^{(1)}(\mathbf{r}_2) = -e \int \frac{\bar{\varphi}_{n_1}(\mathbf{r}_1) \varphi_{m_1}(\mathbf{r}_1) e^{i\omega_{n_1 m_1} \frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{c}}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\mathbf{r}_1 \cdot e^{i\omega_{n_1 m_1} t}, \\ \mathfrak{A}^{(1)}(\mathbf{r}_2) = e \int \frac{\bar{\varphi}_{n_1}(\mathbf{r}_1) \alpha^{(1)} \varphi_{m_1}(\mathbf{r}_1) e^{i\omega_{n_1 m_1} \frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{c}}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\mathbf{r}_1 \cdot e^{i\omega_{n_1 m_1} t}. \end{cases}$$

Der Operator der dem Felde  $\Phi^{(1)}$ ,  $\mathfrak{A}^{(1)}$  entsprechenden Zusatzenergie an der Stelle  $\mathbf{r}_2$  des Elektrons 2 ist nach der Diracschen Theorie gleich

$$-e [\Phi^{(1)}(\mathbf{r}_2) + (\alpha^{(2)}, \mathfrak{A}^{(1)}(\mathbf{r}_2))].$$

Das dem Übergang  $m_2 \rightarrow n_2$  des Elektrons 2 entsprechende Matricelement dieses Operators ist dann

$$-e \int \int \overline{\psi_{n_2}(\mathbf{r}_2)} [\Phi^{(1)}(\mathbf{r}_2) + (\alpha^{(2)}, \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{r}_2))] \psi_{m_2}(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_2,$$

also nach (14) gleich

$$(15) \left\{ \int \int \overline{\varphi_{n_2}(\mathbf{r}_1)} \overline{\varphi_{n_2}(\mathbf{r}_2)} \cdot \frac{e^2 [1 - (\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})]}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \cdot \varphi_{m_1}(\mathbf{r}_1) \varphi_{m_2}(\mathbf{r}_2) e^{i\omega_{m_1} n_1 \frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{c}} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \cdot e^{i(\omega_{n_1} m_1 + \omega_{n_2} m_2)t} \right\}$$

Wenn man das Verfahren, welches zu dem Ausdruck (15) führte, im Grenzfall  $c = \infty$  und mit den nichtrelativistischen Schrödingerschen Ausdrücken für Ladungs- und Stromdichte durchführte, käme man, wie man sofort sieht, gerade zu dem durch (8) gegebenen Ausdruck für  $(n_1 n_2 | V | m_1 m_2)^*$ . (15) ist jedoch nicht symmetrisch in den beiden Teilchen, es könnte daher bedenklich erscheinen diesen Ausdruck als die relativistische Verallgemeinerung von (8) anzusehen. Es zeigt sich aber, daß die physikalisch allein in Betracht kommenden Übergangswahrscheinlichkeiten (12) von dieser Asymmetrie befreit sind. Wegen der Deltafunktion in (12) kommen nämlich nur solche Übergänge in Frage, für welche  $\omega_{m_2} n_2 = -\omega_{m_1} n_1$  ist, und für diese ist dann, wie man leicht sieht, (15) gleich dem durch Vertauschung von 1 und 2 entstehenden Ausdruck. Wegen der Symmetrie der Endresultate ist es bequem (und erlaubt) gleich mit symmetrischen Matricelementen zu rechnen, wir setzen daher

$$(16) \left\{ (n_1 n_2 | V | m_1 m_2) = \int \int \overline{\varphi_{n_1}(\mathbf{r}_1)} \overline{\varphi_{n_2}(\mathbf{r}_2)} \frac{e^2 [1 - (\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})]}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \cdot \varphi_{m_1}(\mathbf{r}_1) \varphi_{m_2}(\mathbf{r}_2) \cdot \frac{e^{i\omega_{m_1} n_1 \frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{c}} + e^{i\omega_{m_2} n_2 \frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{c}}}{2} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \right\}$$

Dadurch erhalten wir einen Ausdruck, der die Bedingung (10) der Symmetrie erfüllt. Weiter erkennt man sofort, daß auch die Bedingung (9) der Hermitizität erfüllt ist [die  $\alpha$ 's sind hermitesche Matrizen und außerdem ist nach (6)  $\omega_{mn} = -\omega_{nm}$ ]. Der Faktor mit den Exponentialgliedern im Integranden von (16) rührt von der Retardation her, er wird gleich Eins für  $c = \infty$ . Das Glied  $-\frac{e^2 (\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$  stellt die Spinwechselwirkung dar, so wie sie von Gaunt explizit postuliert wurde. Es ist befriedigend, daß dieses Glied hier von selbst erscheint, sobald man relativistische Invarianz fordert.

Man sieht weiter aus (16), daß die relativistische Wechselwirkung nicht mehr als einen nur von den Koordinaten und Spinmatrizen abhängigen Operator im Konfigurationsraum darstellbar ist. So etwas wie eine Schrödingergleichung wird es also im relativistischen Mehrkörperproblem allgemein nicht mehr geben, was natürlich damit zusammenhängt, daß man die klassischen Bewegungsgleichungen hier nicht mehr in Hamiltonscher Form schreiben kann.

Die totale Wechselwirkung

$$(17) \quad (n_1 n_2 | U | m_1 m_2) = (n_1 n_2 | V_1 | m_1 m_2) + (n_1 n_2 | V | m_1 m_2),$$

zwischen Atom und Elektron 1 erhält man jetzt durch Addition der Ausdrücke (7) und (16); dies in (12) eingesetzt, sollte uns dann eine erste Näherung für die Wahrscheinlichkeit  $P$  der Übergänge  $(m_1 m_2) \rightarrow (n_1 n_2)$  geben.

## § 2. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Anregung niedriger Niveaus

Die Eigenlösungen  $\psi_{n_1}$  sind in unserem Problem ebene Wellen, nämlich die Eigenlösungen der Diracschen Gleichung für ein freies Elektron, also von der Form:

$$(18) \quad \psi_{p_1 s_1} = N_1 a_{p_1 s_1} \cdot e^{i[(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}_1) - \omega_1 t]},$$

wobei

$$\mathbf{p}_1 = \frac{2\pi}{h} \cdot \mathbf{p}_1,$$

und  $\mathbf{p}_1$  der Impulsvektor des betreffenden stationären Zustandes bedeutet;  $\omega_1$  ist  $2\pi/h$ -mal der entsprechenden Energie

$$E_1 = c \sqrt{m^2 c^2 + p_1^2},$$

also

$$(18') \quad \omega_1 = c \sqrt{x^2 + k_1^2},$$

wenn

$$\frac{2\pi}{h} m c = x$$

gesetzt wird. Die Amplitude  $a$  ist eine vierkomponentige Größe, die außer von  $\mathbf{p}_1$  auch von der Spinvariablen  $s_1$  abhängt;  $s_1$  kann unabhängig von  $\mathbf{p}_1$  zwei Werte  $\alpha$  und  $\beta$  annehmen,  $N_1$  ist ein Normierungsfaktor.

Für  $s_1 = \alpha$  haben die vier Komponenten  $a_{p_1 s_1}$  nach Darwin die Werte:

$$(19a) \quad -\frac{k_{1x} - i k_{1y}}{x + \frac{\omega_1}{c}}, \quad \frac{k_{1z}}{x + \frac{\omega_1}{c}}, \quad 0, \quad 1,$$

und für  $s_1 = \beta$ :

$$(19b) \quad -\frac{k_{1z}}{x + \frac{\omega_1}{c}}, \quad -\frac{k_{1x} + i k_{1y}}{x + \frac{\omega_1}{c}}, \quad 1, \quad 0.$$

$s_1 = \alpha$  bedeutet nach Darwin, daß der Spin „parallel“,  $s_1 = \beta$  daß er „antiparallel“ zur Richtung der Z-Achse steht.

Wenn wir in gewöhnlicher Weise pro  $p_1$  normieren, wird:

$$(20) \quad N_1^2 = \frac{x + \frac{\omega_1}{c}}{2 h^3 \cdot \left(\frac{\omega_1}{c}\right)}.$$

Alle Größen des Zustandes nach dem Stoß verstehen wir mit einem Strich, diejenigen des Zustandes vor dem Stoß mit einer oben angehängten Null. Es ist also  $(m_1) = (p_1^0 s_1^0)$  und  $(n_1) = (p_1' s_1')$ .

Die  $\psi_{n_s}(\mathbf{r}_2)$  sind die relativistischen Wasserstoffeigenfunktionen. Für unsere Zwecke genügt es jedoch diese durch passende Approximationen zu ersetzen. Ist  $(n_s)$  ein diskreter Zustand oder ein kontinuierlicher Zustand mit  $E_{n_s} - m c^2 \ll m c^2$ , können wir die Darwinschen<sup>1)</sup> approximativen Eigenfunktionen benutzen. Die  $\psi_{n_s}$  werden dann von der Form:

$$(21) \quad \psi_{v s_s}(\mathbf{r}_2) = a_{s_s} \cdot \varphi_v(\mathbf{r}_2) e^{-i \omega_s t}; \quad \omega_s = \frac{2 \pi}{h} (m c^2 + E_v).$$

$\varphi_v(\mathbf{r}_2)$  ist eine normierte Schrödingersche Wasserstoffeigenfunktion und  $E_v$  der entsprechende nichtrelativistische Eigenwert (unter Abzug der Ruhenergie  $m c^2$ ).  $v$  steht also hier als Abkürzung für die drei Quantenzahlen  $(n l m)$  der nichtrelativistischen Theorie,  $v = 0$  möge dem Grundzustand entsprechen. Außer diesen hat man noch die Spinvariable  $s_s$  die den beiden verschiedenen Einstellungsmöglichkeiten des Spins entsprechend zwei verschiedene Werte  $\alpha$  und  $\beta$  annehmen kann. Die „Amplitude“  $a$  in (21) ist eine von  $s_s$  abhängige vierkomponentige Größe, deren Komponenten im Gegensatz zu (18), (19) Operatoren sind, welche auf die Funktion  $\varphi_v(\mathbf{r}_2)$  operieren, und zwar sind die vier Komponenten von  $a$  für  $s_s = \alpha$ :

$$(22a) \quad \frac{i}{2 \pi} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad -\frac{i}{2 \pi} \frac{\partial}{\partial z}, \quad 0, \quad 1,$$

und für  $s_s = \beta$ :

$$(22b) \quad \frac{i}{2 \pi} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{i}{2 \pi} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad 1, \quad 0.$$

1) C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc. 118. S. 654. 1928.

Wir haben also:

$$(n_2) = (v, s_2'), \quad (m_2) = (0, s_2^0),$$

wenn  $s_2^0, s_2'$  den Spinzustand vor und nach dem Stoß angibt.

Nach (12) erhalten wir dann für die Wahrscheinlichkeit (pro Sekunde) eines Stoßes, bei welchem Elektron 1 vom Zustand  $(p_1^0 s_1^0)$  in einen Zustand zwischen  $(p_1' s_1')$  und  $(p_1' + dp_1', s_1')$  und gleichzeitig das Atom vom Zustand  $(0 s_2^0)$  in den Zustand  $(v s_2')$  übergeht, den Ausdruck:

$$(23) \quad \frac{4\pi^2}{h} \delta(E_v - E_0 + E_1' - E_1^0) |(p_1' s_1' v s_2' | U | p_1^0 s_1^0 0 s_2^0)|^2 d\Pi_1,$$

wo

$$d\Pi_1 = dp_{1x} dp_{1y} dp_{1z}$$

gesetzt ist. Das in (23) auftretende Matricelement ist nach (17), (7), (16), (18) und (21) gleich:

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} & -e^2 \delta_{or} \cdot \delta_{s_2^0, s_2'} \cdot N_1' N_1^0 \overline{a_1'} a_1^0 \int \frac{e^{i(\mathbf{r}_1^0 - \mathbf{r}_1', \mathbf{r}_1)}}{r_1} d\mathbf{r}_1 \\ & + (p_1' s_1' v s_2' | V | p_1^0 s_1^0 0 s_2^0). \end{aligned} \right.$$

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} & (p_1' s_1' v s_2' | V | p_1^0 s_1^0 0 s_2^0) = e^2 N_1' N_1^0 \\ & \cdot \{ \overline{a_1'} a_1^0 \cdot f - (\overline{a_1'} \alpha^{(1)} a_1^0, \mathfrak{F}) \}, \end{aligned} \right.$$

$$(26a) \quad \left\{ \begin{aligned} & f = \iint \overline{a_2'} \varphi_v(\mathbf{r}_2) a_2^0 \varphi_0(\mathbf{r}_2) e^{i(\mathbf{r}_1^0 - \mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2)} \\ & \cdot \frac{\cos\left(\frac{\omega_1^0 - \omega_1'}{c} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|\right)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \end{aligned} \right.$$

$$(26b) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathfrak{F} = \iint \overline{a_2'} \varphi_v(\mathbf{r}_2) \alpha^{(2)} \cdot a_2^0 \varphi_0(\mathbf{r}_2) \cdot e^{i(\mathbf{r}_1^0 - \mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2)} \\ & \cdot \frac{\cos\left(\frac{\omega_1^0 - \omega_1'}{c} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|\right)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \end{aligned} \right.$$

[wegen der  $\delta$ -Funktion in (23) können wir

$$\omega_{m_1 n_1} = -\omega_{m_2 n_2} = \omega_1^0 - \omega_1'$$

setzen]. In (24) und (25) sind  $a_1^0, a_1'$  die Amplituden des Elektrons 1 vor und nach dem Stoß;  $a_2^0$  und  $a_2'$  sind die entsprechenden Größen für das Elektron 2, z. B. ist also  $a_1' = a_{p_1' s_1'}$  und  $a_2^0 = a_{s_2^0}$ .

Die Komponenten der Vektoren  $\alpha^{(1)}$  und  $\alpha^{(2)}$  sind die folgenden Diracschen Matrizen:

$$(27) \quad \alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & +i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Es möge nun  $p_1^0$  in Richtung der positiven  $Z$ -Achse liegen; ist ferner  $\Theta$  der Winkel zwischen  $p_1'$  und  $p_1^0$  und  $\varphi$  der Winkel, den die Projektion von  $p_1'$  auf die  $XY$ -Ebene mit der  $X$ -Achse bildet, dann haben wir:

$$(28) \quad \begin{cases} d\Pi' = d p_{1'x} d p_{1'y} d p_{1'z} = p_1'^2 d p_1' \sin \Theta d \Theta d \varphi \\ \quad \quad \quad = p_1' \frac{E_1'}{c^2} d E_1' \sin \Theta d \Theta d \varphi. \end{cases}$$

(Letzteres wegen  $E_1' = c \sqrt{m^2 c^2 + p_1'^2}$ ).

Der Anfangszustand ( $p_1^0 s_1^0$ ) entspricht einem Strom von Elektronen in Richtung der positiven  $Z$ -Achse mit einer Stromdichte  $J_z^0 = -c a_{v_1^0 s_1^0} \alpha_{s_1^0}^{(1)} a_{v_1^0 s_1^0}$ . Mit Hilfe von (19) und (27) erkennt man leicht, daß diese Stromdichte dieselbe ist für  $s_1^0 = \alpha$  und für  $s_1^0 = \beta$ , und zwar ist in beiden Fällen:

$$(29) \quad J_z^0 = N_1^0 \cdot \frac{2 k_1^0 c}{\kappa + \frac{\omega_1^0}{c}}.$$

Um nun den „differentiellen Wirkungsquerschnitt“ zu erhalten, müssen wir daher (23) mit  $J_z^0$  dividieren; weiter hat man in (23) unabhängig über die beiden Indizes  $s_1'$  und  $s_2'$  zu summieren, da die vier Endzustände, welche bei festem  $p_1'$  und  $v$  den verschiedenen Werten von  $s_1', s_2'$  entsprechen, experimentell nicht unterschieden werden. Ebenso muß man, wenn das einfallende Elektronenbündel unpolarisiert ist, über  $s_1^0$  und  $s_2^0$  summieren und ein Viertel dieser Summe nehmen. Schließlich führen wir (28) in (23) ein und integrieren über  $E_1'$ .

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist dann:

$$(30) \quad \begin{cases} d\Phi_v(\Theta, \varphi) = \frac{4\pi^2}{h} \cdot \frac{p_1' E_1' \sin \Theta d \Theta d \varphi}{c^2 J_z^0} \\ \quad \quad \quad \cdot \frac{1}{4} \sum_{s_1^0 s_2^0 s_1' s_2'} |(p_1' s_1' v s_2' | U | p_1^0 s_1^0 s_2^0)|^2, \end{cases}$$

und bedeutet also die (mittlere) Anzahl (pro Sekunde und pro Atom) der Stöße bei welchen das Atom vom Grundzustand in den Zustand  $(v) = (n l m)$  übergeht und gleichzeitig das einfallende Elektron 1 in den Raumwinkel  $d \Theta d \varphi$  in der Richtung  $\Theta, \varphi$  gestreut wird, wenn die mittlere Anzahl der Elektronen welche im einfallenden Elektronenstrom pro Sekunde einen Quadratzentimeter durchqueren gleich Eins ist. Die in (30) auftretenden Größen  $p_1'$  und  $E_1'$ , also die Geschwindigkeit des gestreuten Teilchens, ist bestimmt durch den Energiesatz

$$(31) \quad E_1^0 - E_1' = E_v - E_0.$$

Für die elastischen Stöße wo  $\omega_1^0 = \omega_1'$  ist, wird der Kosinus im Integranden von (26), der den Einfluß der Retardation angibt gleich Eins. Bei unelastischen Stößen verschwindet das erste Glied auf der rechten Seite von (24), da  $\delta_{0\nu} = 0$  wenn  $\nu \neq 0$ . Im folgenden werden wir uns nur mit den unelastischen Stößen beschäftigen, da sie allein für die Bremsung und Ionisation maßgebend sind; wir können daher in (30)  $U$  durch  $V$  ersetzen, wo das Matricelement von  $V$  durch (25) gegeben ist.

Aus (21), (22), sieht man, daß die beiden ersten Komponenten der Funktion  $\psi_{\nu z_2}$  klein sind gegen die dritte oder vierte Komponente. Das Verhältnis zwischen den zu vergleichenden Komponenten ist von der Größenordnung  $p_\nu/mc$ , wo  $p_\nu$  den „Impuls des Elektrons im Zustand  $\nu$ “ darstellt, und für alle Zustände, welche der Bedingung  $E_\nu \ll mc^2$  befriedigen, ist  $\frac{p_\nu}{mc} \ll 1$ . Es ist daher naheliegend die beiden ersten

Komponenten gleich Null zu setzen, dann verschwindet wie man sofort sieht der Vektor  $\mathfrak{F}$  und damit die Spinwechselwirkung in (25). Das ist jedoch nicht erlaubt, da, wie wir sehen werden, für die Stöße mit kleiner Impulsübertragung die erwähnten Glieder eine wesentliche Rolle spielen.<sup>1)</sup>

Die Auswertung der durch (26) gegebenen Größen  $f$  und  $\mathfrak{F}$  geschieht am leichtesten, indem man eine „Fourierintegral-

darstellung“ von  $\frac{\cos\left(\frac{\omega_1^0 - \omega_1'}{c} |r_1 - r_2|\right)}{|r_1 - r_2|}$  heranzieht. Erstens ist wie man leicht zeigt<sup>2)</sup> für alle Werte von  $|r_1 - r_2|$

$$(32) \quad \cos\left(\frac{\omega_1^0 - \omega_1'}{c} |r_1 - r_2|\right) = + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(k \cdot |r_1 - r_2|) \cdot 2k dk}{k^2 - \left(\frac{\omega_1^0 - \omega_1'}{c}\right)^2}$$

wo im Integral der rechten Seite der Cauchysche Hauptwert zu nehmen ist. Sodann erkennt man gleich, daß

$$(33) \quad \frac{\cos\left(\frac{\omega_1^0 - \omega_1'}{c} |r_1 - r_2|\right)}{|r_1 - r_2|} = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{i(t, r_1 - r_2)}}{k^2 - \left(\frac{\omega_1^0 - \omega_1'}{c}\right)^2} dk_x dk_y dk_z$$

1) Auf diesen für das Resultat der Rechnung entscheidenden Punkt haben mich sowohl Hr. Bethe wie auch Hr. Delbrück aufmerksam gemacht, wofür ich ihnen sehr zu Dank verpflichtet bin.

Anmerkung bei der Korrektur: Vgl. eine soeben erschienene Arbeit von H. Bethe, Ztschr. f. Phys. 76. S. 293. 1932.

2) Vgl. z. B. eine Arbeit des Verf.s, Ztschr. f. Phys. 66. S. 520. 1930.

wo  $\mathbf{f}$  ein Integrationsvektor mit einem Absolutbetrag  $|\mathbf{f}| = k$  ist, die Integration ist über den ganzen  $\mathbf{f}$ -Raum zu erstrecken. Führt man nämlich im  $\mathbf{f}$ -Raum polare Koordinaten  $k, \vartheta, \chi$  mit einer Polarachse in Richtung des Vektors  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  ein und integriert über  $\vartheta$  und  $\chi$ , wird das Integral auf der rechten Seite von (33)

$$+ \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cos \vartheta}}{k^2 - \left(\frac{\omega_1^0 - \omega_1^1}{c}\right)^2} k^2 dk \sin \vartheta d\vartheta d\chi$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \cdot \int_0^\infty \frac{\sin(k \cdot |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \cdot 2k dk}{k^2 - \left(\frac{\omega_1^0 - \omega_1^1}{c}\right)^2}, \quad (34)$$

was wegen (32) mit der linken Seite übereinstimmt.

Setzt man nun (33) in (26a) ein, erhält man

$$f = \frac{1}{2\pi^2} \iiint \frac{\overline{a_2'} \varphi_\nu(\mathbf{r}_2) \cdot a_2^0 \varphi_0(\mathbf{r}_2) e^{-i(\mathbf{f}, \mathbf{r}_2)}}{k^2 - \left(\frac{\omega_1^0 - \omega_1^1}{c}\right)^2} \cdot e^{i(\mathbf{r}_1^0 - \mathbf{r}_1' + \mathbf{f}, \mathbf{r}_1)} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 dk_y dk_z. \quad (31)$$

Nach dem Fouriertheorem ist aber

$$\int e^{i(\mathbf{r}_1^0 - \mathbf{r}_1' + \mathbf{f}, \mathbf{r}_1)} d\mathbf{r}_1 = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{r}_1^0 - \mathbf{r}_1' + \mathbf{f}). \quad (35)$$

Die Integration über  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{f}$  in dem Ausdruck für  $f$  liefert daher

$$(26a) \quad \left\{ \begin{aligned} f &= \frac{4\pi}{|\mathbf{r}_1^0 - \mathbf{r}_1'|^2 - \left(\frac{\omega_1^0 - \omega_1^1}{c}\right)^2} \\ &\quad \cdot \int \overline{a_2'} \varphi_\nu(\mathbf{r}_2) a_2^0 \varphi_0(\mathbf{r}_2) e^{i(\mathbf{r}_1^0 - \mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2)} d\mathbf{r}_2. \end{aligned} \right. \quad (36)$$

Ebenso erhält man

$$(26b) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{F} &= \frac{4\pi}{|\mathbf{r}_1^0 - \mathbf{r}_1'|^2 - \left(\frac{\omega_1^0 - \omega_1^1}{c}\right)^2} \\ &\quad \cdot \int \overline{a_2'} \varphi_\nu(\mathbf{r}) a_2^{(2)} \varphi_0(\mathbf{r}) \cdot e^{i(\mathbf{r}_1^0 - \mathbf{r}_1', \mathbf{r})} d\mathbf{r}. \end{aligned} \right. \quad (37)$$

$\nu$  stand hier als Abkürzung für die drei Quantenzahlen  $n, l, m$ ; die stationären Zustände mit vorgegebener Hauptquantenzahl  $n$  aber verschiedenen Werten der Nebenquantenzahlen  $l$  und  $m$  haben dieselbe Energie  $E_n$ , wir wollen daher in (30) über  $l$  und  $m$  summieren. Ferner können wir, da das Problem in bezug auf die Richtung der  $z$ -Achse (Richtung des ein-

Chr. M.

fallen  
über  
wobei  
geht  
 $\theta$  und

ein A  
Energ  
Angab  
mit 2

wo

(35)

gesetzt

(36)

Für d

also

(37)

wo

(38)

gleich  
dem S  
K  
wir ei

(38')

k ist  
Zustan

Ann

fallenden Elektrons) axialsymmetrisch ist, gleich die Integration über  $\varphi$  ausführen und erhalten so für die Anzahl der Stöße, wobei das Atom in einen Zustand mit der Energie  $E_n$  übergeht und das stoßende Elektron eine Ablenkung zwischen  $\Theta$  und  $\Theta + d\Theta$  erfährt

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} d\Phi_n(\Theta) &= \frac{4\pi^2}{h} \cdot \frac{p_1' E_1' 2\pi \sin \Theta d\Theta}{e^2 J_n^0} \\ &\cdot \frac{1}{4} \sum_{l, m} \sum_{s_1^0 s_1'^0 s_2^0 s_2'^0} |(p_1' s_1' \nu s_2' | V | p_1^0 s_1^0 s_2^0)|^2, \end{aligned} \right.$$

ein Ausdruck, der nur von  $\Theta$  und  $n$  abhängt; wegen des Energiesatzes (31) ist nämlich  $p_1'$  und damit  $k_1'$  und  $E_1'$  durch Angabe von  $n$  vollständig bestimmt. Multiplizieren wir (31) mit  $2\pi/hc$  erhalten wir

$$(31') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\omega_1^0 - \omega_1'}{c} &= \sqrt{x^2 + k_1^{02}} - \sqrt{x^2 + k_1'^2} \\ &= \frac{2\pi}{hc} (E_n - E_0) = \frac{\alpha_{0n}^2}{2x}, \end{aligned} \right.$$

wo

$$(35) \quad \alpha_{0n}^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E_n - E_0)$$

gesetzt ist. Also

$$(36) \quad k_1'^2 = \left( \sqrt{x^2 + k_1^{02}} - \frac{\alpha_{0n}^2}{2x} \right)^2 - x^2.$$

Für die diskreten Niveaus ist

$$E_n = - \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} \frac{1}{n^2},$$

also

$$(37) \quad \alpha_{0n}^2 = \alpha^2 \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right),$$

wo

$$(38) \quad \alpha = \frac{4\pi^2 m e^2}{h^2} = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(-E_0)}$$

gleich  $2\pi/h$  mal dem „Impuls“ des gebundenen Elektrons vor dem Stoß ist.

Für die kontinuierlichen Zustände wo  $E_n > 0$  definieren wir eine Größe  $k$  durch

$$(38') \quad k = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m E_n} = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m E_k}, \quad E_n = E_k = \frac{h^2}{8\pi^2 m} k^2.$$

$k$  ist also  $2\pi/h$  mal dem Impuls des Elektrons in diesem Zustand.

Es ist dann für kontinuierliche Zustände.

$$(37) \quad \alpha_{0n}^2 = \alpha_{0k}^2 = \alpha^2 + k^2.$$

Setzen wir ferner

$$(39) \quad q = \mathfrak{k}_1^0 - \mathfrak{k}_1' \quad q = |q|,$$

dann ist wegen (31') der Nenner in den durch (26'a, b) gegebenen Ausdrücken für  $f$  und  $\mathfrak{F}$  gleich

$$q^2 - \left( \frac{\alpha_{0n}^2}{2x} \right)^2.$$

Um nun den Gesamtquerschnitt für die Anregung eines  $n$ -Niveaus zu erhalten, haben wir (34) über  $\Theta$  zu integrieren; zu diesem Zweck ist es jedoch bequem statt  $\Theta$  die Größe  $q$  als Integrationsvariable einzuführen.

Nach Definition ist

$$(40) \quad q^2 = k_1^{02} + k_1'^2 - 2 k_1^0 k_1' \cos \Theta.$$

Mittels (36) erhält man daraus  $\Theta$  als Funktion von  $q$  und  $n$ . Es ist

$$(41) \quad 2 k_1^0 k_1' \cos \Theta = k_1^{02} - q^2 + \left( \sqrt{x^2 + k_1^{02}} - \frac{\alpha_{0n}^2}{2x} \right)^2 - x^2.$$

Ferner durch Differentiation von (40) bei festgehaltenen  $n$  oder  $k_1'$

$$q \, dq = + k_1^0 k_1' \sin \Theta \, d\Theta.$$

Für die Anzahl der Stöße mit einer Impulsübertragung zwischen  $\frac{h}{2\pi} q$  und  $\frac{h}{2\pi} (q + dq)$ , wobei das Atom in einen  $n$ -Zustand übergeführt wird, ergibt sich dann nach (34)

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} d\Phi_n(q) &= \frac{4\pi^2 \cdot E_1' q \, dq}{k_1^0 c^2 J_z^0} \\ &\cdot \frac{1}{4} \sum_{l, m} \sum_{s_1^0 s_1'^0 s_2^0 s_2'^0} |(p_1' s_1' v s_2' | V | p_1^0 s_1^0 0 s_2^0)|^2, \end{aligned} \right.$$

wo die Größe auf der rechten Seite jetzt als Funktion von  $n$  und  $q$  aufzufassen ist.

Der kleinste Wert  $q_{\min}$  von  $q$  hängt von  $n$  ab und zwar ist  $q_{\min} = k_1^0 - k_1'$ , wo  $k_1'$  durch (36) gegeben ist. Für die Niveaus mit denen wir es in diesem Paragraphen zu tun haben, läßt sich die Beziehung (36) bedeutend vereinfachen.

Die Voraussetzung für die Anwendbarkeit der approximativen Eigenfunktionen (21), (22) war nämlich, daß

$$E_k \ll m c^2.$$

Das bedeutet nach (38')

$$k^2 \ll \alpha^2.$$

Die in diesem Paragraphen entwickelten Ausdrücke für die Wirkungsquerschnitte gelten also nur für die Anregung der diskreten Niveaus und derjenigen kontinuierlichen Niveaus, für welche  $k$  unterhalb einer gewissen Grenze  $K$  liegt, wo  $K$  der Ungleichung

$$(43a) \quad K^2 \ll \alpha^2$$

genügt. Wegen

$$\frac{\alpha^2}{x^2} \sim 5 \cdot 10^{-5} \ll 1$$

( $\alpha/x$  ist gleich der Feinstrukturkonstante) können wir  $K$  so wählen, daß gleichzeitig

$$(43b) \quad K \gg \alpha$$

ist.

Damit unsere Näherung überhaupt genügt, müssen wir ferner annehmen, daß der Impuls des einfallenden Elektrons groß ist gegen den „Impuls“ des Atomelektrons vor dem Stoß also

$$\frac{\alpha^2}{k_1^{02}} \ll 1$$

(Bedingung für die Gültigkeit der Bornschen Näherung.)

Infolgedessen können wir  $K$  so wählen, daß außer 43a, b) auch die Bedingung

$$(43c) \quad K^2 \ll k_1^{02}$$

erfüllt ist.

Aus (37), (37') erkennt man dann, daß für alle Niveaus mit einer Energie kleiner als  $E_K$  die Größe

$$\frac{\alpha_{0n}^2}{x \sqrt{x^2 + k_1^{02}}} \ll 1$$

ist.

Wir können daher in (36) nach dieser Größe entwickeln und erhalten, wenn wir nach dem ersten Glied abbrechen

$$k_1' = k_1^0 - \frac{\alpha_{0n}^2 \sqrt{x^2 + k_1^{02}}}{2x k_1^0}.$$

Also ist

$$(44) \quad q_{\min} = k_1^0 - k_1' = \frac{\alpha_{0n}^2 \sqrt{x^2 - k_1^{02}}}{2 \pi k_1^0} = \frac{\alpha_{0n}^2 \cdot \gamma}{2 k_1^0} \ll \alpha_{0n},$$

wo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

also

$$k_1^0 = \frac{2 \pi}{h} m v \cdot \gamma$$

ist.

Für die obere Grenze  $q_{\max}$  erhalten wir in derselben Weise

$$q_{\max} = k_1^0 + k_1' = 2 k_1^0 - \frac{\alpha_{0n}^2 \sqrt{x^2 + k_1^{02}}}{2 \pi k_1^0} \sim 2 k_1^0 \gg \alpha.$$

Der Gesamtquerschnitt für die Anregung eines Niveaus mit der Energie  $E_n < E_K$  ist dann einfach

$$(45) \quad \Phi_n = \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} d \Phi_n(q),$$

wo  $d \Phi_n(q)$  durch (42) gegeben ist.

Der Ausdruck (42) für  $d \Phi_n(q)$  läßt sich leicht allgemein berechnen, es zeigt sich aber, daß bei der Integration über  $q$  in (45) nur ein Intervall  $q_{\min} < q < q_1$  in Betracht kommt, wo  $q_1$  etwa gleich  $2K$  gesetzt werden kann. Für  $q > q_1 = 2K$  wird der Ausdruck  $d \Phi_n(q)$  so klein, daß das Intervall  $q_1 < q < q_{\max}$  für das ganze Integral keine Rolle spielt. (Dies gilt nur für  $E_n < E_K$ .)

Nach (43a, b, c) ist

$$(45a) \quad q_1^2 \ll \left\{ \begin{array}{l} x^2 \\ k_1^{02} \end{array} \right. \quad \text{und} \quad q_1 \gg \alpha.$$

Für  $q < q_1$  können wir daher bei der Berechnung von (42) alle Größen der Form  $q^2/x^2$ ,  $q^2/k_1^{02}$  vernachlässigen und die Rechnung ergibt einfach:

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} d \Phi_n(q) = \frac{8 \pi \alpha^2 \gamma^2}{k_1^{02}} \left[ \frac{q dq}{q^2 - \left( \frac{\alpha_{0n}^2}{2 \pi} \right)^2} \right. \\ \left. \cdot \sum_{l, m} |\varepsilon_r(q) + \frac{i \sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} \varepsilon_r'(q)|^2 \right] \end{array} \right.$$

$$(47a) \quad \varepsilon_\nu(q) = \int \overline{\varphi_\nu} \varphi_0 e^{i(q, r)} d\tau.$$

$$(47b) \quad \varepsilon'_\nu(q) = \frac{1}{x} \int \overline{\varphi_\nu} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} e^{i(q, r)} d\tau.$$

Das Glied  $\frac{i\sqrt{\gamma^2-1}}{x} \varepsilon'_\nu(q)$  in (46) rührt von der Spinwechselwirkung her. Für  $c \rightarrow \infty$  oder  $x \rightarrow \infty$  verschwindet es ebenso wie das Retardationsglied  $\left(\frac{\alpha_{0n}^2}{2x}\right)^2$  im Nenner und (46) geht über in

$$(46a) \quad d\Phi_n(q) = \frac{8\pi\alpha^2\gamma^2}{k_1^0} \frac{dq}{q^3} |\varepsilon_n(q)|^2,$$

wenn wir

$$|\varepsilon_n(q)|^2 = \sum_{l, m} |\varepsilon_\nu(q)|^2$$

setzen. Das stimmt mit der nichtrelativistischen Formel von Bethe<sup>1)</sup> überein.

Die Ausdrücke für  $|\varepsilon_n(q)|^2$  können wir aus der Betheschen Arbeit übernehmen. Für die diskreten Niveaus ist

$$(48a) \quad \left\{ \begin{aligned} |\varepsilon_n(q)|^2 &= \left(\frac{q}{\alpha}\right)^2 \cdot 2^8 n^7 \left[ \frac{1}{3}(n^2-1) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{qn}{\alpha}\right)^2 \right] \frac{[(n-1)^2 + \left(\frac{qn}{\alpha}\right)^2]^{n-3}}{[(n+1)^2 + \left(\frac{qn}{\alpha}\right)^2]^{n+3}}, \quad (n=2, 3, 4 \dots \infty) \end{aligned} \right.$$

und für die kontinuierlichen

$$(48b) \quad \left\{ \begin{aligned} |\varepsilon_n(q)|^2 &= |\varepsilon_k(q)|^2 = \frac{q^2 2^8 k \alpha^6 \left( q^2 + \frac{1}{3}(\alpha^2 + k^2) \right)}{[(q+k)^2 + \alpha^2]^3 [(q-k)^2 + \alpha^2]^3} \\ &\quad \cdot \frac{e^{-2\frac{\alpha}{k} \arctg \frac{2\alpha k}{q^2 - k^2 + \alpha^2}}}{1 - e^{-2\pi \frac{\alpha}{k}}}. \end{aligned} \right.$$

Im Grenzfall  $q^2 \ll \alpha^2$  gehen die Ausdrücke (48a, b) über in

$$(49) \quad |\varepsilon_n(q)|^2 = q^2 |x_{0n}|^2,$$

wo  $x_{0n}$  die dem Übergang  $0 \rightarrow n$  entsprechende Matrix der  $x$ -Koordinate ist. Es ist natürlich

$$(49a) \quad |x_{0n}|^2 = |y_{0n}|^2 = |z_{0n}|^2 = |(r_s)_{0n}|^2,$$

1) H. Bethe, Ann. d. Phys. [5] 5. S. 325. 1930.



wo  $r_s$  die Komponente des Radiusvektors nach einer beliebigen Richtung  $s$  darstellt. Speziell für die diskreten Niveaus ist

$$(49b) \quad |x_{0n}|^2 = \frac{2^8 n^7 (n-1)^{2n-5}}{3 \alpha^2 (n+1)^{2n+5}}.$$

Nun ist

$$\varphi_0 = \frac{\alpha^{3/2}}{\pi^{1/2}} e^{-\alpha r},$$

also

$$\varepsilon'_v = -\frac{\alpha}{x} \int \overline{\varphi_v} \varphi_0 \cdot \frac{z}{r} \cdot e^{i(q, r)} d\tau.$$

Wegen  $\frac{\alpha}{x} \ll 1$  sieht man dann sofort, daß

$$|\varepsilon'_v| \ll |\varepsilon_v(q)|, \quad \text{wenn } q \gtrsim \alpha.$$

Für  $q \gtrsim \alpha$  vereinfacht sich dann (46) zu

$$(46b) \quad d\Phi_n(q) = \frac{8\pi\alpha^2\gamma^2}{k_1^2} \frac{q \, d q \, |\varepsilon_n(q)|^2}{\left[ q^2 - \left( \frac{\alpha_{0n}^2}{2x} \right)^2 \right]}.$$

Das Spinglied  $\varepsilon'_v(q)$  kann nur dann eine Rolle spielen, wenn  $q \ll \alpha$  ist. In diesem Fall können wir die Exponentialfunktionen in (47a), (47b) nach  $(q, r)$  entwickeln und nach dem ersten von Null verschiedenen Glied abbrechen, denn wegen der Funktion  $e^{-\alpha r}$  in  $\varphi_0$  erstrecken sich die Integrationen in (47a, b) praktisch nur über eine Kugel vom Radius  $1/\alpha$ .<sup>1)</sup>

Man erhält in dieser Weise

$$X_v = \varepsilon_v(q) + \frac{i\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma} \varepsilon'_v(q) = i \left[ \int \overline{\varphi_v} \varphi_0(q, r) d\tau + \frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma x} \int \overline{\varphi_v} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} d\tau \right].$$

Nun zeigt man leicht, daß

$$(50) \quad -2 \int \overline{\varphi_v} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} d\tau = \alpha_{0v}^2 \int z \overline{\varphi_v} \varphi_0 d\tau.$$

Zum Beweis gehen wir aus von den Schrödingerschen Gleichungen:

$$-\Delta \overline{\varphi_v} - eV \cdot \overline{\varphi_v} = \frac{8\pi^2 m}{h^2} E_v \overline{\varphi_v},$$

$$-\Delta \varphi_0 - eV \cdot \varphi_0 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} E_0 \varphi_0.$$

1) Daß die Spinwechselwirkung für  $q \ll \alpha$  wesentlich wird, ist durch den Umstand bedingt, daß das erste Glied in der Entwicklung der Exponentialfunktion in dem Ausdruck (47a) für  $\varepsilon_v(q)$  wegen der Orthogonalität der Eigenfunktionen verschwindet, während dies in dem Ausdruck (47b) für  $\varepsilon'_v(q)$  nicht der Fall ist.

$V$  ist hier das vom Kern herrührende Potential des Atom-  
elektrons.

Wir multiplizieren die erste der beiden Gleichungen mit  $\varphi_0$ , die zweite mit  $\overline{\varphi}_v$  und subtrahieren, dann erhält man

$$\alpha_{0v}^2 \overline{\varphi}_v \varphi_0 = \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} (E_v - E_0) \overline{\varphi}_v \varphi_0 = - [\varphi_0 \Delta \overline{\varphi}_v - \overline{\varphi}_v \Delta \varphi_0].$$

Also

$$\alpha_{0v}^2 \int z \overline{\varphi}_v \varphi_0 d\tau = - \int [(z \varphi_0) \Delta \overline{\varphi}_v - (z \overline{\varphi}_v) \Delta \varphi_0] d\tau,$$

daraus durch partielle Integration, indem man berücksichtigt,  
daß  $\varphi_0$  und ihre Ableitungen im Unendlichen verschwinden:

$$\begin{aligned} \alpha_{0v}^2 \int z \overline{\varphi}_v \varphi_0 d\tau &= \int [(\text{grad } (z \varphi_0), \text{grad } \overline{\varphi}_v) - (\text{grad } z \overline{\varphi}_v, \text{grad } \varphi_0)] d\tau \\ &= \int \left[ \varphi_0 \frac{\partial \overline{\varphi}_v}{\partial z} - \overline{\varphi}_v \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right] d\tau = -2 \int \overline{\varphi}_v \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} d\tau, \end{aligned}$$

womit (50) bewiesen ist.

Definieren wir jetzt ein Vektor  $\mathfrak{s}$  mit den Komponenten

$$s_x = q_z, \quad s_y = q_y, \quad s_z = q_x - \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} \frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi},$$

erhalten wir mittels (50) für  $q \ll \alpha$  den folgenden Ausdruck  
für  $X_v$ :

$$X_v = i \int \overline{\varphi}_v \varphi_0 \cdot (\mathfrak{s}, \mathbf{r}) d\tau = i s \int \overline{\varphi}_v \varphi_0 r_s d\tau,$$

wo  $r_s$  die Projektion von  $\mathbf{r}$  auf  $\mathfrak{s}$  bedeutet.

Also nach (49a)

$$\sum_{l, m} |X_v|^2 = \sum_{l, m} s^2 |(r_s)_{0v}|^2 = s^2 |(r_s)_{0n}|^2 = s^2 |x_{0n}|^2,$$

$$s^2 = q^2 - q_z \frac{2\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} \frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi} + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \left( \frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi} \right)^2.$$

Nach Definition ist

$$q_z = k_1^0 - k_1' \cos \Theta,$$

mittels (41) ergibt das

$$q_z = \frac{q^2}{2k_1^0} - \frac{1}{2k_1^0} \left( \frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi} \right)^2 + \frac{\sqrt{\gamma^2 + k_1^0{}^2}}{k_1^0} \cdot \frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi}.$$

Setzt man das in dem Ausdruck für  $s^2$  ein und berücksichtigt, daß  $\frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi^2\gamma}$  für alle hier betrachteten Niveaus gegen Eins vernachlässigt werden kann, erhält man

$$s^2 = q^2 - \left( \frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi} \right)^2 - \frac{1}{\gamma^2} \left( \frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi} \right)^2.$$

Für  $q \ll \alpha$  reduziert sich also der Ausdruck (46) zu

$$(46c) \quad d\Phi_n(q) = \frac{8\pi\alpha^2\gamma^2}{k_1^{02}} \cdot \frac{q^2 - \left( \frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi} \right)^2 - \frac{1}{\gamma^2} \left( \frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi} \right)^2}{\left[ q^2 - \left( \frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi} \right)^2 \right]^2} |x_{0n}|^2 \cdot q dq.$$

Wenn gleichzeitig  $q^2 \gg \left( \frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi} \right)^2$ , wird (46c) nach (49) äquivalent mit (46a), indem Retardierung und Spinwechselwirkung in diesem Fall vernachlässigbar sind.

Der Gesamtquerschnitt für die Anregung eines Niveaus mit der Energie  $E_n < E_K$  ist nun

$$(51) \quad \Phi_n = \int_{q_{\min}}^{q_1} d\Phi_n(q), \quad q_1 = 2K,$$

wo  $d\Phi_n(q)$  durch (46) gegeben ist.

Handelt es sich um ein kontinuierliches Niveau mit der Energie  $E_n = E_k$ , ist der Ausdruck (51) pro Einheit der  $k$ -Skala zu verstehen.

Die im vorhergehenden abgeleiteten Formeln sind unter Vernachlässigung des „Austausches“ hergeleitet. Eine nähere Untersuchung zeigt jedoch, daß der Austausch für den Gesamtquerschnitt (51) keine Rolle spielt, solange die betreffenden Anregungsniveaus eine Energie besitzen, die unterhalb der Grenze  $E_K = \frac{h^2}{8\pi^2 m} K^2$  liegt.

### § 3. Der Wirkungsquerschnitt für die Anregung bestimmter Niveaus

Wir wollen zunächst den Wirkungsquerschnitt  $\Phi_n$  für die Anregung eines *diskreten*  $n$ -Niveaus berechnen.

Die untere Grenze  $q_{\min}$  in dem Integral (51) ist nach (44), (37) sehr klein gegen  $\alpha$  für alle diskreten Niveaus, die obere Grenze  $q_1 = 2K$  ist dagegen nach (45a) sehr groß gegen  $\alpha$ .

Wir teilen nun die Integration in (51) in zwei Teilintegrationen von  $q_{\min}$  bis  $q_0$  und von  $q_0$  bis  $q_1$ .  $q_0$  ist so gewählt, daß

$$(52a) \quad q_0 \ll \alpha$$

und gleichzeitig

$$(52b) \quad q_0^2 \gg \left( \frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi} \right)^2 \quad \text{für } n = 2, 3, \dots, \infty,$$

diese beiden Bedingungen sind, wegen (37) und da  $\frac{\alpha^2}{x^2} \ll 1$  sehr wohl erfüllbar. Also

$$\Phi_n = \int_{q_{\min}}^{q_0} d\Phi_n(q) + \int_{q_0}^{q_1} d\Phi_n(q).$$

Für  $q < q_0$  können wir wegen der Bedingung (52a) den Ausdruck (46) für  $d\Phi_n(q)$  durch (46c) ersetzen. Für  $q = q_0$  ist nach (52b) und (49) (46c) äquivalent mit (46a), d. h. die Spinwechselwirkung und die Retardation spielen hier keine Rolle mehr; für  $q > q_0$  ist dies a fortiori richtig und wir können für  $q > q_0$  (46) durch (46a) ersetzen.

Wir erhalten so

$$\Phi_n = \frac{8\pi\alpha^2\gamma^2}{k_1^{\circ 2}} \left[ |x_{0n}|^2 \int_{q_{\min}}^{q_0} q dq \left\{ \frac{1}{q^2 - \left( \frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi} \right)^2} - \frac{\frac{1}{\gamma^2} \left( \frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi} \right)^2}{\left[ q^2 - \left( \frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi} \right)^2 \right]^2} \right\} + \int_{q_0}^{q_1} \frac{dq}{q} |\varepsilon_n(q)|^2 \right].$$

Unter Benutzung der Ausdrücke (44), (48a) für  $q_{\min}$  und  $|\varepsilon_n(q)|^2$  ergibt sich

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi_n &= \frac{4\pi\alpha^2\gamma^2}{k_1^{\circ 2}} |x_{0n}|^2 \left[ \ln \frac{q_0^2 - \left( \frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi} \right)^2}{\left( \frac{\alpha_{0n}^2}{2k_1^{\circ}} \right)^2} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\left( \frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi} \right)^2}{q_0^2 - \left( \frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi} \right)^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2^{10}\pi\gamma^2 n^7}{3k_1^{\circ 2}} \cdot A \right] \end{aligned} \right.$$

$$A = \int_{x_0}^{x_1} [(n^2 - 1) + x] \frac{[(n - 1)^2 + x]^{n-3}}{[(n + 1)^2 + x]^{n+3}} \frac{dx}{x}, \quad x = \left( \frac{qn}{\alpha} \right)^2.$$

Das Integral  $A$  tritt auch im nichtrelativistischen Fall auf und ist für beliebige  $n$  von Bethe<sup>1)</sup> ausgewertet worden. Er findet

$$A = \frac{(n-1)^{2n-5}}{(n+1)^{2n+5}} \cdot \left| \ln x - \ln[(n+1)^2 + x] + \sum_{r=1}^{n+2} \frac{C_{nr}}{r \left(1 - \frac{x}{(n+1)^2}\right)^r} \right|_{x_0}^{x_1},$$

$$C_{nr} = 1 - \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{2n-6} \cdot \left[ \sum_{k=0}^{r-6} \binom{n-3}{k} \left(\frac{-4n}{(n+1)^2}\right)^k + 3 \binom{n-3}{r-5} \left(\frac{-4n}{(n+1)^2}\right)^{r-5} \cdot \frac{n+1}{n-1} \right].$$

Wegen (45a) und (52a) ist  $x_1^0 \gg n^2$  und  $x_0 \ll n^2$ ; man erhält daher mit genügender Annäherung für  $A$  den Ausdruck

$$A = \frac{(n-1)^{2n-5}}{(n+1)^{2n+5}} \left[ \ln \frac{(n+1)^2}{\left(\frac{n^2 q_1^2}{\alpha^2}\right)} - \sum_{r=1}^{n+2} \frac{C_{nr}}{r} \right].$$

Dies in (53) eingesetzt, ergibt dann mit Berücksichtigung von (52b), (49b) und (37)

$$(54a) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi_n &= \frac{4\pi \alpha^2 \gamma^2}{k_1^2} \cdot |x_{0n}|^2 \\ &\cdot \left[ \ln \frac{q_0^2 (2k_1^0)^2}{\alpha^4 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^2} - \frac{v^2}{c^2} + \ln \frac{(n+1)^2 \alpha^2}{n^2 q_0^2} - \sum_{r=1}^{n+2} \frac{C_{nr}}{r} \right] \\ &= \frac{4\pi \alpha^2 \gamma^2}{k_1^2} \cdot |x_{0n}|^2 \left[ \ln a_n \left(\frac{2k_1^0}{\alpha}\right)^2 - \frac{v^2}{c^2} \right], \end{aligned} \right.$$

wo

$$(55) \quad \ln a_n = 2 \ln \frac{n}{n-1} - \sum_{r=1}^{n+2} \frac{C_{nr}}{r}$$

oder

$$(54b) \quad \Phi_n = \frac{2\pi e^4}{R h \cdot m v^2} \alpha^2 |x_{0n}|^2 \left[ \ln \frac{2a_n m v^2}{R h} - \ln \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{v^2}{c^2} \right],$$

wo  $R$  die Rydbergkonstante, also  $R h$  die Ionisierungsenergie, ist. Für  $\frac{v^2}{c^2} = 0$  erhalten wir den nichtrelativistischen Aus-

1) Bethe, a. a. O.

druck von Bethe. Die durch (55) definierten Größen  $a_n$  nehmen nach Bethe mit wachsendem  $n$  sehr langsam zu, indem  $a_1 = 0,498$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$  ist. Der Klammerausdruck in (54b) ist also prak-

tisch von  $n$  unabhängig, so daß die Wirkungsquerschnitte  $\Phi_n$  proportional den optischen Übergangswahrscheinlichkeiten sind.

Während aber der Proportionalitätsfaktor nichtrelativistisch mit wachsender Geschwindigkeit monoton abnimmt, erreicht er hier wegen des Auftretens von  $-\ln\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$  in dem Klammerausdruck ein Minimum und steigt dann wieder an, wenn die Geschwindigkeit  $v$  sehr nahe an die Lichtgeschwindigkeit kommt.

In derselben Weise berechnet man den Wirkungsquerschnitt für die Anregung eines kontinuierlichen Niveaus. Wir betrachten hier nur den Fall, wo die Energie  $E_n = E_k$  des angeregten Zustandes sehr nahe bei  $E_K$  liegt, so daß  $k \sim K \gg \alpha$ .

In diesem Fall ist

$$q_{\min} = \frac{\alpha^2 + k^2}{2k_1^0} \gamma \sim \alpha$$

und wir können für alle bei der Bildung des Gesamtquerschnittes in Betracht kommenden Werte von  $q$  den Ausdruck (46) für den differentiellen Querschnitt durch den einfacheren Ausdruck (46b) ersetzen, wo die Spinwechselwirkung vernachlässigt ist.

Der Wirkungsquerschnitt für die Anregung kontinuierlicher Niveaus mit einer Energie zwischen

$$E_k \quad \text{und} \quad E_{k+d} \quad (k \gg \alpha)$$

wird also

$$\Phi_k dk = dk \frac{8\pi^2 \alpha^2 \gamma^2}{k_1^{02}} \int_{q_{\min}}^{q_k} \frac{q dq}{\left[q^2 - \left(\frac{\alpha^2 + k^2}{2\pi}\right)^2\right]^2} |\epsilon_k(q)|^2,$$

wo  $|\epsilon_k(q)|^2$  durch (48b) gegeben ist.

Nun sieht man gleich, daß auch das Retardationsglied  $\left(\frac{\alpha^2 + k^2}{2\pi}\right)^2$  vernachlässigt werden kann, denn für  $k \gg \alpha$  erhält

der Faktor  $\frac{1}{[(q-k)^2 - \alpha^2]^2}$  in dem Ausdruck (48b) für  $|\epsilon_k(q)|^2$  den Charakter einer Diracschen Deltafunktion  $\delta(q-k)$ , der praktisch Null ist außer in der Nähe von  $q=k$  und dort ein steiles Maximum hat, so daß nur solche Stoßprozesse eine merkliche Wahrscheinlichkeit haben, für welche der Impulsatz gilt.

Für  $q = k$  ist aber  $q^2 - \left(\frac{\alpha^2 + k^2}{2\alpha}\right)^2$  im wesentlichen gleich  $q^2$ , weil  $\alpha^2 \gg k^2 \gg \alpha^2$ . Bei der Berechnung des obigen Integrals können wir nun überall außerhalb des Faktors  $\frac{1}{[(q-k)^2 + \alpha^2]^{\frac{3}{2}}}$   $q$  gleich  $k$  setzen. Wir erhalten dann

$$\Phi_k dk = dk \cdot \frac{8\pi\alpha^2\gamma^2}{k_1^3} \cdot \frac{2^3}{3\pi k^3} \cdot \alpha^5 \int_{x_{\min}}^{x_1} \frac{dx}{[x^2 + \alpha^2]^{\frac{3}{2}}},$$

und

$$x = q - k, \quad x_1 = 2K - k$$

Nun ist

$$x_{\min} = q_{\min} - k.$$

$$\alpha^5 \int \frac{dx}{[x^2 + \alpha^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\alpha^3 x}{4(\alpha^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\alpha x}{8(\alpha^2 + x^2)} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} \frac{x}{\alpha}$$

und die beiden Grenzen erfüllen die Bedingungen

$$x_1 \gg \alpha \quad \text{und} \quad x_{\min} < 0 \quad |x_{\min}| \gg \alpha.$$

In dem Integral gibt also nur das letzte Glied einen merklichen Beitrag, und  $\operatorname{arctg} \frac{x}{\alpha}$  ist für  $x = x_1$  und  $x = x_{\min}$  praktisch gleich  $\frac{\pi}{2}$  bzw.  $-\frac{\pi}{2}$ .

Schließlich erhält man dann

$$(56) \quad \Phi_k dk = \frac{8\pi\alpha^2\gamma^2}{k_1^3} \frac{dk}{k^3}.$$

Die beim Stoß auf das Atom übertragene Energie ist

$$Q = E_k - E_0,$$

also hier praktisch gleich  $E_k$ , da wir  $k \gg \alpha$ , d. h.  $E_k \gg E_0$  angenommen hatten.

Führen wir nun  $Q = E_k = \frac{h^2}{8\pi^2 m} k^2$  statt  $k$  als Variable ein, ergibt sich wegen

$$dQ = \frac{h^2}{4\pi^2 m} k dk$$

für die Anzahl der Stöße mit einer Energieübertragung zwischen  $Q$  und  $Q + dQ$

$$(57) \quad \Phi_Q dQ = \frac{2\pi e^4 \cdot dQ}{m v^4 \cdot Q^2}.$$

Das ist aber genau die Formel, welche man auch nach der klassischen Mechanik beim Stoß freier Teilchen für diese Größe erhält.

(57) gilt natürlich nur, wenn  $Q$  in der Nähe von  $E_K$  liegt, also sehr groß gegen  $E_0$  ist.

Chr. M.

§ 4. D.

F.  
quersc  
einer  
funktio  
approx  
heraus

Wir l  
dem S  
von d

(18')

Hier i  
wieder  
sprech  
durch  
in (19  
und e  
entneh

V  
tragen  
haben  
hier d  
I  
wie in

wo  $a_s$   
beiden  
S. 543  
Verhä  
ordnu  
genau  
Elekt

I  
tude  
I  
Gl. (2  
kungs  
Stoß  
tron 2

§ 4. Der Wirkungsquerschnitt für die Anregung hoher Niveaus  
Streuung freier Elektronen

Die in § 2 entwickelten Ausdrücke für den Wirkungsquerschnitt galten nur für die Anregung von Niveaus mit einer Energie  $E_n < E_K$ , da wir nur für solche die Eigenfunktionen  $\psi_n$  des Elektrons 2 nach dem Stoß durch (21) approximieren können. Für  $E_n > E_K$  ist aber der Impuls des herausgeworfenen Elektrons größer als

$$\frac{\hbar}{2\pi} K \gg \frac{\hbar}{2\pi} \alpha.$$

Wir können daher für diese Zustände das Elektron 2 nach dem Stoß als frei behandeln, so daß  $\psi_n$  eine ebene Welle von der Form (18) wird, also

$$(18') \quad \psi_{v', s'} = N_2' a_{v', s'} e^{i[(v', r_2) - \omega_2' t]}; \quad \omega_2' = c \sqrt{\alpha^2 + k_2'^2}.$$

Hier ist  $p_2'$  der Impuls des losgelösten Teilchens, und  $s_2'$  kann wieder zwei verschiedene Werte  $\alpha$  und  $\beta$  annehmen; die entsprechenden Werte der vierkomponentigen Amplituden  $a$  sind durch (19) gegeben, wo man natürlich die Größen, welche in (19) den Index 1 tragen, statt dessen mit einem Index 2 und einem Strich zu versehen hat. In genau derselben Weise entnehmen wir aus (20) den Ausdruck für  $N_2'$ .

Wir können jetzt alle Formeln des § 2 einfach übertragen. Der Index  $\nu$  entspricht hier dem Index  $p_2'$ , statt  $q_\nu(r_2)$  haben wir hier  $e^{i(v', r_2)}$  zu setzen und an Stelle von  $a_{\nu'}$  tritt hier die auch von  $p_2'$  abhängige Größe  $a_{v', s'}$ .

Die Eigenfunktion des Elektrons 2 vor dem Stoß ist genau wie in § 2 gleich

$$a_{s_2^0} \varphi_0(r_2) e^{-i \omega_{s_2^0} t}; \quad \omega_{s_2^0} = \frac{2\pi}{h} (m c^2 + E_0),$$

wo  $a_{s_2^0}$  durch (22) gegeben ist. Hier können wir jedoch die beiden ersten Komponenten von  $a_{s_2^0}$  gleich Null setzen (vgl. S. 543), da wir dabei nur solche Glieder vernachlässigen, deren Verhältnis zu den übrigbleibenden Gliedern von der Größenordnung  $\alpha/k_2^0$  ist. Tut man das, erhält  $a_{s_2^0}$  nach (22) und (19) genau dieselben Komponenten wie die Amplitude eines freien Elektrons mit einem Impuls  $p_2^0 = 0$ .

Das Gebundensein drückt sich also nicht in der Amplitude aus.

Durch Wiederholung der Überlegungen, welche zu den Gl. (23) und (30) führten, ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt für Stöße, wobei das Elektron 1 nach dem Stoß einen Impuls zwischen  $p_1'$  und  $p_1' + dp_1'$  und das Elektron 2 einen Impuls zwischen  $p_2'$  und  $p_2' + dp_2'$  hat



$$(58) \left\{ \begin{aligned} d\Phi_{p_1'}(p_1') &= \frac{4\pi^2}{hJ_1^0} \delta(E_1' + E_2' - E_1^0 - mc^2 - E_0) \\ &\quad \cdot \frac{1}{4} \sum_{s_1^0 s_2^0 s_1' s_2'} \left| (p_1' s_1' p_2' s_2' | V | p_1^0 s_1^0 p_2^0 s_2^0) \right|^2 \\ &\quad \cdot d\Pi_1' d\Pi_2' \\ d\Pi_2' &= dp_{2x}' dp_{2y}' dp_{2z}' \end{aligned} \right.$$

Für das auftretende Matrixelement gilt hier [(vgl. (25), (26)] der Ausdruck

$$(58a) \left\{ \begin{aligned} (1' s_1', 2' s_2' | V | 1^0 s_1^0, 2^0 s_2^0) &= e^2 N_2' N_1' N_1^0 \\ &\quad \cdot \{ \overline{a_1'} a_1^0 \cdot \overline{a_2'} a_2^0 - (\overline{a_1'} \alpha^{(1)} a_1^0, \overline{a_2'} \alpha^{(1)} a_2^0) \} f. \end{aligned} \right.$$

$$(58b) \left\{ \begin{aligned} f &= \iint e^{-i(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2)} q_0(\mathbf{r}_2) e^{i(\mathbf{r}_1^0 - \mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2)} \\ &\quad \cdot \frac{\cos\left(\frac{\omega_1^0 - \omega_1'}{c} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|\right)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \right.$$

Hier ist natürlich  $a_2'$  eine Abkürzung für  $a_{p_2' s_2'}$  (vgl. die analoge Bedeutung der anderen in der Klammer  $\{\}$  auftretenden Amplituden § 2 S. 541).

Weiter haben wir auf der linken Seite von (58a) statt  $p_1', p_1^0, p_2'$  die abkürzenden Bezeichnungen  $1', 1^0, 2'$  eingeführt; aus Symmetriegründen schreiben wir ebenfalls  $2^0$  für das Niveau  $\nu = 0$  des Teilchens 2 vor dem Stoß.

Der Ausdruck (58) gilt nur, wenn wir den Austausch der beiden Elektronen vernachlässigen und das ist nun bei der Anregung der hohen Niveaus  $k_2' > K$  nicht mehr erlaubt.

Die vier Endzustände des Totalsystems, über die in (58) summiert wird, haben wir bis jetzt durch die folgenden, in den beiden Teilchen unsymmetrischen Eigenfunktionen dargestellt

$$(59) \left\{ \begin{aligned} \psi_{1' \alpha}(I) \cdot \psi_{2' \alpha}(II), \quad \psi_{1' \alpha}(I) \cdot \psi_{2' \beta}(II), \\ \psi_{1' \beta}(I) \cdot \psi_{2' \alpha}(II), \quad \psi_{1' \beta}(I) \cdot \psi_{2' \beta}(II). \end{aligned} \right.$$

$\psi_{1' \alpha}(I)$  repräsentiert hier in einer leicht verständlichen Bezeichnungsweise den Zustand, wo das Elektron 1 einen Impuls  $p_1'$  und eine Spinvariable  $s_2' = \alpha$  hat, d. h. wo der Spin des Elektrons „parallel“ der Z-Achse steht, es ist also  $\psi_{1' \alpha}(I)$  dasselbe wie  $\psi_{p_1' \alpha}(\mathbf{r}_1)$  in der früheren Bezeichnung. Analoge Bedeutung haben die anderen Symbole in (59).  $\psi_{1' \alpha}(II)$  soll ebenso den Zustand darstellen, wo das Elektron 2 einen Impuls  $p_1'$  und einen Spin parallel der Z-Achse hat.

Statt (59) hat man nun, wenn man den Austausch berücksichtigt will, nach Oppenheimer<sup>1)</sup> die folgenden vier Funktionen als Darstellungen der Endzustände des Totalsystems anzusehen:

$$(59') \quad \begin{cases} \psi_{a'} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{1'a}(I) \cdot \psi_{2'a}(II) - \psi_{2'a}(I) \cdot \psi_{1'a}(II)], \\ \psi_{b'} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{1'b}(I) \cdot \psi_{2'b}(II) - \psi_{2'b}(I) \cdot \psi_{1'b}(II)], \\ \psi_{c'} = \frac{1}{2} [\psi_{1'a}(I) \psi_{2'b}(II) - \psi_{2'b}(I) \psi_{1'a}(II) \\ \quad + \psi_{1'b}(I) \psi_{2'a}(II) - \psi_{2'a}(I) \psi_{1'b}(II)], \\ \psi_{d'} = \frac{1}{2} [\psi_{1'a}(I) \psi_{2'b}(II) - \psi_{2'b}(I) \psi_{1'a}(II) \\ \quad - \psi_{1'b}(I) \psi_{2'a}(II) + \psi_{2'a}(I) \psi_{1'b}(II)]. \end{cases}$$

Die Funktionen (59') sind in Übereinstimmung mit dem Pauliprinzip antisymmetrisch in I und II.

Ganz analog hat man die vier Anfangszustände des Totalsystems, über die in (58) summiert wird, durch vier antisymmetrische Funktionen  $\psi_{a^0}, \psi_{b^0}, \psi_{c^0}, \psi_{d^0}$  zu repräsentieren, die genau dieselbe Form haben wie (59'), bloß ist der Strich überall durch eine Null zu ersetzen. Die Funktionen  $\psi_{1'a}(I), \psi_{2'a}(II) \dots$  usw., aus denen die Größen  $\psi_{a^0}, \psi_{b^0} \dots$  usw. in dieser Weise aufgebaut sind, haben dann eine ganz analoge Bedeutung wie die  $\psi_{1'a}(I), \psi_{2'a}(II) \dots$  usw. Also repräsentiert zum Beispiel  $\psi_{1'a}(I)$  den Zustand, wo das Elektron 1 einen Impuls  $p_1^0$  und einen zur Z-Achse parallelen Spin hat.

Um nun den Austausch in dem Ausdruck für den differentiellen Wirkungsquerschnitt zu berücksichtigen, hat man bloß die Summe über  $s_1^0 s_2^0 s_1' s_2'$  in (58) durch die Quadratsumme  $S$  der den 16 verschiedenen möglichen Übergängen  $(a^0, b^0, c^0, d^0) \rightarrow (a', b', c', d')$  entsprechenden Matrixelemente der Wechselwirkungsenergie zu ersetzen.  $S$  ist also von der Form

$$(60) \quad S = \sum | \langle b' | V | a^0 \rangle |^2.$$

Die in dieser Summe auftretenden Matrixelemente haben alle dieselbe Gestalt. Wir wollen hier als typisches Beispiel nur den Ausdruck für das dem Übergang  $a^0 \rightarrow b'$  entsprechende Element  $\langle b' | V | a^0 \rangle$  ausführlich hinschreiben. Aus (59') und den entsprechenden Ausdrücken für die Eigenfunktionen der Anfangszustände des Totalsystems sieht man, daß

1) J. R. Oppenheimer, Phys. Rev. **32**. S. 361. 1928.

$$(60') \left\{ \begin{aligned} (b' | V | a^0) &= \frac{1}{2} [(1' \beta, 2' \beta | V | 1^0 \alpha, 2^0 \alpha) + (2' \beta, 1' \beta | V | 2^0 \alpha, 1^0 \alpha) \\ &\quad - (1' \beta, 2' \beta | V | 2^0 \alpha, 1^0 \alpha) - (2' \beta, 1' \beta | V | 1^0 \alpha, 2^0 \alpha)], \end{aligned} \right.$$

wo die einzelnen Glieder in diesem Ausdruck durch (58a, b) gegeben sind. Die beiden ersten und ebenso die beiden letzten Glieder in (60') unterscheiden sich nur dadurch, daß 1 und 2 vertauscht sind, und sind daher wegen der fundamentalen Symmetrieeigenschaft (10) der Matrixelemente einander gleich. Also

$$(b' | V | a^0) = (1' \beta, 2' \beta | V | 1^0 \alpha, 2^0 \alpha) - (2' \beta, 1' \beta | V | 1^0 \alpha, 2^0 \alpha).$$

Hier unterscheidet sich wiederum das letzte Glied von dem ersten nur dadurch, daß (1'  $\beta$ ) und (2'  $\beta$ ) vertauscht sind. Aus (58a, b) ergibt sich daher:

$$(60'') \left\{ \begin{aligned} (b' | V | a^0) &= e^2 N_2' N_1' N_1^0 \\ &\quad \cdot [\overline{a_1'} a_1^0 \cdot \overline{a_2'} a_2^0 - (\overline{a_1'} \alpha^{(1)} a_1^0, \overline{a_2'} \alpha^{(2)} a_2^0) \{f \\ &\quad - \overline{a_2'} a_1^0 \cdot \overline{a_1'} a_2^0 - (\overline{a_2'} \alpha^{(1)} a_1^0, \overline{a_1'} \alpha^{(2)} a_2^0) \} g] \\ &= e^2 N_2' N_1' N_1^0 [\{f\}_f \cdot f - \{g\}_g \cdot g], \end{aligned} \right.$$

wo

$$(58c) \left\{ \begin{aligned} g &= \iint e^{-i(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2)} \varphi_0(\mathbf{r}_2) \cdot e^{i(\mathbf{r}_1^0 - \mathbf{r}_2', \mathbf{r}_1)} \\ &\quad \cdot \frac{\cos\left(\frac{\omega_1^0 - \omega_2'}{c} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|\right)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \end{aligned} \right.$$

und  $f$  durch (58b) gegeben ist. Alle anderen in  $S$  auftretenden Matrixelemente haben dieselbe Gestalt wie (60'), sind also von der Form:

$$(61) \quad e^2 N_2' N_1' N_1^0 [A \cdot f - B \cdot g],$$

wo  $A$  und  $B$  ähnlich wie die Klammergrößen  $\{f\}_f$  und  $\{g\}_g$  in (60'') aus den Amplituden der verschiedenen Eigenfunktionen aufgebaut sind. Für  $g = 0$  wird  $S$  gleich der in (58) auftretenden Summe.

Für den Wirkungsquerschnitt ergibt sich nun mit Berücksichtigung des Austausches

$$(62) \quad d\Phi_{\mathbf{r}_2'}(\mathbf{p}_1') = \frac{4\pi^2}{\hbar J_2^0} \delta(E_1' + E_2' - E_1^0 - mc^2 - E_0) \cdot \frac{1}{4} S \cdot d\Pi_1' \cdot d\Pi_2'.$$

Wir müssen jetzt aber diese Größe etwas anders deuten, sie bedeutet die Anzahl der Stöße, wobei nach dem Stoß das eine Elektron einen Impuls  $\mathbf{p}_1'$  und das andere einen Impuls  $\mathbf{p}_2'$  hat. Wir können aber wegen des Austausches gar nicht mehr sagen, welches der beiden herausfliegenden Elektronen das ursprüng-

lich im Atom gebundene und welches das auffallende Elektron ist.

Die Auswertung des Integrals (58b) für  $f$  verläuft nun genau so wie die Berechnung des Integrals (26a) in § 2. (58b) unterscheidet sich von (26a) nur dadurch, daß die Funktion  $\varphi_0(\mathbf{r}_2)$  durch  $e^{-i(\mathbf{t}_1', \mathbf{r}_2)}$  ersetzt ist und die Größen  $\overline{a_2'}$  und  $a_2^0$  fortgelassen sind. Für (26a) erhielten wir in § 2 den Ausdruck (26'a); ebenso erhalten wir dann für (58b):

$$(58'b) \quad \left\{ \begin{aligned} f &= \frac{4\pi}{|\mathbf{t}_1^0 - \mathbf{t}_1'|^2 - \left(\frac{\omega_1^0 - \omega_1'}{c}\right)^2} \cdot \int \varphi_0(\mathbf{r}_2) e^{i(\mathbf{t}_1^0 - \mathbf{t}_1' - \mathbf{t}_1', \mathbf{r}_2)} d\mathbf{r}_2 \\ &= \frac{h^2}{\pi \left[ |\mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_1'|^2 - \left(\frac{E_1^0 - E_1'}{c}\right)^2 \right]} \cdot D. \end{aligned} \right.$$

$$(63) \quad D = \int \varphi_0(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{t}_1^0 - \mathbf{t}_1' - \mathbf{t}_1', \mathbf{r})} d\mathbf{r}.$$

Nach (58b, c) unterscheidet sich nun  $g$  von  $f$  nur dadurch, daß  $\mathbf{t}_1'$  und  $\mathbf{t}_2'$  vertauscht sind und  $\omega_1'$  durch  $\omega_2'$  ersetzt ist. Für  $g$  ergibt sich daher:

$$(58'a) \quad g = \frac{h^2}{\pi \left[ |\mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_2'|^2 - \left(\frac{E_1^0 - E_2'}{c}\right)^2 \right]} \cdot D.$$

Wir erhalten dann nach (60''):

$$(64) \quad (b' | V | a^0) = \frac{h^2}{\pi} e^2 N_2' N_1' N_1^0 \cdot D \cdot J_{a'a^0},$$

$$(64') \quad J_{a'a^0} = \frac{\{ \}_{f'}}{|\mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_1'|^2 - \left(\frac{E_1^0 - E_1'}{c}\right)^2} - \frac{\{ \}_{g'}}{|\mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_2'|^2 - \left(\frac{E_1^0 - E_2'}{c}\right)^2},$$

und alle anderen in  $S$  auftretenden Matricelemente erhalten nach (61) die Form:

$$(61') \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{h^2}{\pi} e^2 N_2' N_1' N_1^0 D \\ &\cdot \left[ \frac{A}{|\mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_1'|^2 - \left(\frac{E_1^0 - E_1'}{c}\right)^2} - \frac{B}{|\mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_2'|^2 - \left(\frac{E_1^0 - E_2'}{c}\right)^2} \right]. \end{aligned} \right.$$

Für den Wirkungsquerschnitt (62) ergibt sich dann:

$$(62') \quad \left\{ \begin{aligned} d\Phi_{\mathbf{r}_1'}(\mathbf{p}_1') &= \frac{4\pi^2}{h J_{a'a^0}} \delta(E_1' + E_2' - E_1^0 - mc^2 - E_0) \\ &\cdot \frac{h^4}{\pi^2} e^4 N_2'^2 N_1'^2 N_1^0 D^2 \cdot \frac{1}{4} S' \cdot d\Pi_1' d\Pi_2'. \end{aligned} \right.$$

$$(59'') \quad S' = \sum |J_{a'a^0}|^2.$$

Das Integral  $D$  (63) läßt sich mühelos auswerten. Es ist

$$\varphi_0(r) = \frac{\alpha^{3/2}}{\pi^{1/2}} e^{-\alpha r},$$

also wenn wir im  $r$ -Raum polare Koordinaten  $r, \vartheta, \chi$  einführen mit der Richtung des Vektors  $\mathbf{r}_1^0 - \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'$  als Polarachse, erhalten wir:

$$D = \frac{\alpha^{3/2}}{\pi^{1/2}} \int e^{-\alpha r} e^{i|\mathbf{r}_1^0 - \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'| \cdot \mathbf{r} \cos \vartheta} r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\chi \\ = \frac{8\pi^{1/2} \alpha^{3/2}}{\alpha^2 + |\mathbf{r}_1^0 - \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'|^2}.$$

Die Gültigkeit von (62') setzt voraus, daß  $k_2' > K \gg \alpha$ . Dann hat aber die Größe

$$D^2 = \frac{2^3 \pi \alpha^5}{[\alpha^2 + |\mathbf{r}_1^0 - \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'|^2]^4}$$

den Charakter einer Diracschen  $\delta$ -Funktion  $N \cdot \delta(\mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_2')$ , die nur für  $\mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_1'$  sehr nahe bei  $\mathbf{p}_2'$  von Null verschieden ist, und dort ein steiles Maximum hat.

Der Normierungsfaktor  $N$  ist offenbar

$$N = 2^6 \pi \alpha^5 \int \frac{d\mathbf{p}_1' \cdot d\mathbf{p}_1' \cdot d\mathbf{p}_1'}{[\alpha^2 + |\mathbf{r}_1^0 - \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'|^2]^4}.$$

Für  $N$  erhält man den Ausdruck

$$N = h^3,$$

der unabhängig von  $\alpha$  ist.

Die Größe  $D^2$  in (62') können wir daher für  $k_2' > K$  durch  $h^3 \delta(\mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_2')$  ersetzen, also:

$$(62'') \quad \left\{ \begin{aligned} d\Phi_{v_1}(\mathbf{p}_1') &= \frac{4h^3}{J_1^0} e^4 N_2'^2 N_1'^2 N_1^0 \\ &\cdot \frac{1}{4} S' \cdot \delta(E_1' + E_2' - E_1^0 - mc^2) \cdot \delta(\mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_2') d\Pi_1' d\Pi_1'. \end{aligned} \right. \quad (67)$$

(Hier haben wir in der  $\delta$ -Funktion die Größe  $E_0$  vernachlässigt, da sie für  $k_2' > K$  gegen alle anderen im Argument auftretenden Größen vernachlässigt werden kann.)

In (62'') ist jetzt  $\alpha$  und damit jede Spur des ursprünglichen Gebundenseins des einen Elektrons verschwunden. Es ist also genau so, wie wenn es sich um den Stoß zweier freien Elektronen handelt, wo das eine Elektron ruht, und das andere mit der Geschwindigkeit  $v$  einfällt.

Wegen der  $\delta$ -Funktion  $\delta(\mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_2')$  in (62'') gilt außer dem Energiesatz auch noch der Impulssatz. Also nur solche

Stoßprozesse haben eine endliche Wahrscheinlichkeit, für welche die Gleichungen

$$(65a) \quad E_1^0 + m c^2 = E_1' + E_2'$$

und

$$(65b) \quad \mathbf{p}_1^0 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2'$$

erfüllt sind. Zu einem bestimmten Winkel  $\Theta$  zwischen dem Impuls  $\mathbf{p}_1'$  des einen Elektrons nach dem Stoß und der Z-Achse gehört ein ganz bestimmter Winkel  $\chi$  zwischen dem Impuls  $\mathbf{p}_2'$  des anderen in dem Stoß beteiligten Elektrons und der Z-Achse, und die zugehörigen Energien  $E_1'$  und  $E_2'$  der herausfliegenden Teilchen sind auch durch Vorgabe von  $\Theta$  (oder  $\chi$ ) eindeutig bestimmt. Um die verschiedenen Größen als Funktion von  $\Theta$  zu erhalten, macht man am einfachsten davon Gebrauch, daß die Erhaltungssätze invariant sind gegenüber Lorentztransformationen. Man transformiert alle Größen auf ein Lorentzsystem  $L^*$ , in welchem die Impulse der Elektronen vor dem Stoß entgegengesetzt gleich sind, also auf ein System, das sich relativ zum ursprünglichen System  $L$  mit einer Geschwindigkeit  $u$  in Richtung der positiven Z-Achse bewegt. Alle Größen in diesem System gemessen bezeichnen wir mit einem Stern. Man erkennt leicht, daß

$$(66) \quad u = \frac{\gamma v}{\gamma + 1}$$

sein muß, damit vor dem Stoß  $p_{1z}^* = -p_{2z}^*$  gilt.

Wegen der Symmetrie um die Z-Achse brauchen wir nur die Verhältnisse in der XZ-Ebene zu betrachten.

Vor dem Stoß ist dann:

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{1x}^* = p_{2x}^* = 0, \\ p_{1z}^* = -p_{2z}^* = m \gamma^* u, \\ E_1^* = E_2^* = m c^2 \gamma^*, \\ \gamma^* = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} \end{array} \right.$$

[nach (66)]. Für die entsprechenden Größen nach dem Stoß erhält man dann sofort durch Anwendung des Energie- und Impulssatzes im System  $L^*$  die folgenden Ausdrücke:

$$(67') \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{1x}^* = m \gamma^* u \sin \Theta^*, \quad p_{1z}^* = m \gamma^* u \cos \Theta^*, \\ p_{2x}^* = -m \gamma^* u \sin \Theta^*, \quad p_{2z}^* = -m \gamma^* u \cos \Theta^*, \\ E_1^* = E_2^* = m c^2 \gamma^*, \end{array} \right.$$

wo  $\Theta^*$  der im bewegten System gemessene Wert des Winkels  $\Theta$  bedeutet.

Zwischen  $\Theta$  und  $\Theta^*$  bestehen die Relationen:

$$(68) \quad \begin{cases} \cos \Theta^* = \frac{\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta \cdot \gamma^{*2}}{\cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta \cdot \gamma^{*2}}; & \sin \Theta^* = \frac{\sin 2 \Theta \cdot \gamma^*}{\cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta \cdot \gamma^{*2}} \\ \sin \Theta^* d\Theta^* = \frac{\sin 2 \Theta d\Theta \cdot 2\gamma^{*2}}{[\cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta \cdot \gamma^{*2}]^2} \\ & = \frac{\sin 2 \Theta \cdot d\Theta \cdot [\gamma + 3 + (\gamma - 1) \cos \Theta^*]}{4(\gamma + 1)} \end{cases}$$

Mit Hilfe der Transformationsformeln für Impuls  $p$  und Energie  $E$  eines freien Teilchens erhält man dann ohne weiteres die gesuchten Größen als Funktion von  $\Theta^*$  oder  $\Theta$ . Bekanntlich ist

$$(69) \quad p_x = p_x^*, \quad p_y = p_y^*, \quad p_z = \gamma^* \left( p_z^* + \frac{u}{c^2} E^* \right); \quad E = \gamma^* (E^* + u p_z^*).$$

Diese Gleichungen drücken aus, daß  $p_x, p_y, p_z, E/c$  die kovarianten Komponenten eines Vierervektors sind.

Wir erhalten dann mittels der Gl. (66—69)

$$(70) \quad \begin{cases} E_1' = m c^2 [\gamma^{*2} + (\gamma^{*2} - 1) \cos \Theta^*] \\ & = \frac{m c^2}{2} [\gamma + 1 + (\gamma - 1) \cos \Theta^*], \\ E_2' = m c^2 [\gamma^{*2} - (\gamma^{*2} - 1) \cos \Theta^*] \\ & = \frac{m c^2}{2} [\gamma + 1 - (\gamma - 1) \cos \Theta^*], \\ p_1' = \sqrt{p_{1x}'^2 + p_{1y}'^2} = \frac{\cos \Theta \cdot m v \gamma}{2(\gamma + 1)} [\gamma + 3 + (\gamma - 1) \cos \Theta^*] \end{cases}$$

usw.

Wir setzen jetzt wieder in (62'')

$$d\Pi_1' = p_1'^2 d p_1' \cdot \sin \Theta d\Theta d\varphi$$

und fragen nach der Anzahl  $d\Phi(\Theta)$  der Stöße, wobei das eine der beiden im Stoß beteiligten Elektronen in einer Richtung zwischen  $\Theta$  und  $\Theta + d\Theta$  herausfliegt. Diese Anzahl erhalten wir durch Integration von (62'') über  $p_2', p_1'$  und  $\varphi$ . Die Integrationen über  $p_2'$  und  $\varphi$  liefern zunächst

$$(70) \quad \begin{cases} d\Phi(p_1', \Theta) = \frac{4h^3}{J_0^3} e^4 N_2'^2 N_1'^2 N_1^0{}^2 \\ \quad \cdot \frac{1}{4} S' \delta(E_1' + E_2' - E_1^0 - m c^2) \cdot 2\pi p_1'^2 d p_1' \sin \Theta d\Theta, \end{cases}$$

wo hier überall

$$p_2' = |p_1^0 - p_1'| = \sqrt{p_1^{02} + p_1'^2 - 2p_1^0 p_1' \cos \Theta}$$

zu setzen ist.<sup>1)</sup>

Bei der darauffolgenden Integration über  $p_1'$  wollen wir die Größe

$$W = E_1' + E_2' = c \sqrt{m^2 c^2 + p_1'^2} + c \sqrt{m^2 c^2 + p_1^{02} + p_1'^2 - 2p_1^0 p_1' \cos \Theta}$$

als neue Integrationsvariable einführen. Das Argument in der  $\delta$ -Funktion ist dann einfach  $W - E_1^0 - m c^2$ . Weiter ist

$$d p_1' = \frac{d W}{c^2 \left[ p_1' \left( \frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_2'} \right) - \frac{p_1^0 \cos \Theta}{E_2'} \right]}.$$

Die Integration über  $W$  liefert dann

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} d\Phi(\Theta) &= \frac{8\pi \hbar^6 e^4 N_1'^2 N_1'^2 N_1'^2}{J_z^0} \\ &\cdot \frac{p_1'^2 \sin \Theta d\Theta}{c^2 \left[ p_1' \left( \frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_2'} \right) - \frac{p_1^0 \cos \Theta}{E_2'} \right]} \cdot \frac{1}{4} S', \end{aligned} \right.$$

wo alle auftretenden Größen  $p_1'$ ,  $E_1'$  usw. diejenigen Werte haben, welche sich aus den Erhaltungssätzen (65) bestimmen.

Aus (68) und (70) errechnet man leicht, daß

$$\begin{aligned} & \frac{p_1'^2 \sin \Theta d\Theta}{c^2 \left[ p_1' \left( \frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_2'} \right) - \frac{p_1^0 \cos \Theta}{E_2'} \right]} \\ &= \frac{\cos \Theta \sin \Theta d\Theta v \gamma [\gamma + 3 + (\gamma - 1) \cos \Theta]^3 E_1' E_2'}{4 c^4 (\gamma + 1)^2} \\ &= \frac{\sin \Theta^* d\Theta^* \cdot v \gamma \cdot E_1' E_2'}{2 c^4 (\gamma + 1)}. \end{aligned}$$

Führt man jetzt außerdem die durch (29) und (20) gegebenen Ausdrücke für  $J_z^0$  und für die Normierungsfaktoren  $N$  in (71) ein, erhält man schließlich mit Hilfe von (70)

$$(71) \quad d\Phi(\Theta) = \frac{\pi}{8} e^4 m^3 \sin \Theta^* d\Theta^* [(\gamma + 3)^2 - (\gamma - 1)^2 \cos^2 \Theta^*] \cdot \frac{1}{4} S'.$$

1) Dies gilt natürlich auch für das Argument der Deltafunktion. Das hatte ich in meiner früheren auf S. 532 zitierten Arbeit übersehen, so daß die dort abgeleitete Formel (12) um einen recht wesentlichen Faktor falsch ist.



Wir haben jetzt nur noch die Größe  $S'$  [Gl. (59'')] zu berechnen. Wir betrachten erst den Nenner

$$J_1 = |\mathfrak{p}_1^0 - \mathfrak{p}_1'^0|^2 - \left( \frac{E_1^0 - E_1'}{c} \right)^2$$

in dem Ausdruck (64') für  $J_{\alpha'\alpha}$ .

Da

$$p_{1x}^0 - p_{1x}', \quad p_{1y}^0 - p_{1y}', \quad p_{1z}^0 - p_{1z}', \quad \frac{E_1^0 - E_1'}{c}$$

die kovarianten Komponenten eines Vierervektors bilden, ist  $J_1$  eine Invariante, nämlich das Quadrat der Länge dieses Vierervektors.

$J_1$  ist also gleich der entsprechenden Größe im Lorentzsystem  $L^*$ . Mittels der Ausdrücke (67) und (67') für die Impulse und Energien im System  $L^*$  ergibt sich dann unmittelbar

$$(72) \quad J_1 = 2m^2 u^2 \gamma^{*2} (1 - \cos \Theta^*) = m^2 u^2 (\gamma + 1)(1 - \cos \Theta^*).$$

In genau derselben Weise erhalten wir für den anderen in (64') auftretenden Nenner

$$(72') \quad |\mathfrak{p}_1^0 - \mathfrak{p}_2'^0|^2 - \left( \frac{E_1^0 - E_2'}{c} \right)^2 = m^2 u^2 (\gamma + 1)(1 + \cos \Theta^*).$$

Bei der Berechnung der Klammergrößen  $\{\}_f, \{\}_g$  in (64'), (60'') kann man in ähnlicher Weise davon Gebrauch machen, daß sie invariante Größen sind.

Bedeutend  $a_1, a_2, b_1, b_2$  vierkomponentige Amplituden von vier willkürlichen ebenen Wellen, welche der Diracschen Gleichung genügen, dann transformieren sich nach Dirac die Größen

$$\overline{a}_1 \alpha_x b_1, \quad \overline{a}_1 \alpha_y b_1, \quad \overline{a}_1 \alpha_z b_1, \quad \overline{a}_1 b_1$$

und

$$\overline{a}_2 \alpha_x b_2, \quad \overline{a}_2 \alpha_y b_2, \quad \overline{a}_2 \alpha_z b_2, \quad \overline{a}_2 b_2$$

wie die Komponenten zweier Vierervektoren. Die Größe

$$(73) \quad J = \{\overline{a}_1 b_1 \cdot \overline{a}_2 b_2 - (\overline{a}_1 \alpha b_1, \quad \overline{a}_2 \alpha b_2)\}$$

ist dann eine Invariante, nämlich das skalare Produkt dieser beiden Vierervektoren.

$J$  bleibt daher unverändert, wenn wir die Amplituden  $a$  und  $b$  durch die entsprechenden transformierten Größen  $a^*$  und  $b^*$  ersetzen.

Also

$$(73) \quad J = \{\overline{a_1^*} b_1^* \cdot \overline{a_2^*} b_2^* - (\overline{a_1^*} a b_1^*, \overline{a_2^*} a b_2^*)\}.$$

Nach Dirac ist

$$a^* = \Gamma a, \quad b^* = \Gamma b,$$

wo  $\Gamma$  ein Matrixoperator ist, der nur von der betreffenden Lorentztransformation abhängt. Für die Transformation  $L \rightarrow L^*$  ist

$$\Gamma = e^{\frac{\Phi}{2} \alpha_z}.$$

$\alpha_z$  ist die durch (27) definierte Matrix,  $e$  die Basis der natürlichen Logarithmen und  $\Phi$  ein hyperbolischer Winkel, der durch die Gleichung

$$\cos \Phi = \gamma^*$$

definiert ist.

Die Amplituden  $a$  und  $b$  der ebenen Wellen waren nach (19) Funktionen der Impulse.

In derselben Weise kann man nun die transformierten Amplituden  $a^*$ ,  $b^*$  als Funktionen der durch (67) und (67') gegebenen transformierten Impulse angeben.

Setzen wir das in (73') ein, erhalten wir  $J$  als Funktion der transformierten Impulse, welche ihrerseits wieder nach (67) und (67') einfache Funktionen von  $v$  und  $\Theta^*$  sind. Die Klammergrößen in (64') haben beide die Form (73) und können also in der erwähnten Weise als Funktion von  $v$  und  $\Theta^*$  berechnet werden. Schließlich erhält man dann unter Berücksichtigung von (72) und (72') die Größe  $J_{a^* a^*}$  als Funktion von  $v$  und  $\Theta^*$ . Die Durchführung der Rechnung gibt

$$J_{a^* a^*} = \frac{4(\gamma^2 - 1) \cos \Theta^*}{m^2 \gamma^2 v^2 [(\gamma + 3)^2 - (\gamma - 1)^2 \cos^2 \Theta^*]}.$$

Genau so können wir bei der Berechnung der anderen in  $S'$  auftretenden Größen verfahren, denn  $A$  und  $B$  in (61') sind einfache Summen oder Differenzen von invarianten Größen der Form (73).

Die Rechnung liefert dann schließlich für die Summe  $S'$

$$\frac{1}{4} S' = \frac{2^5 (\gamma + 1) \left[ \frac{4}{\sin^4 \Theta^*} - \frac{3}{\sin^2 \Theta^*} + \frac{(\gamma - 1)^2}{4\gamma^2} \left( 1 + \frac{4}{\sin^2 \Theta^*} \right) \right]}{m^4 v^4 \gamma^2 [(\gamma + 3)^2 - (\gamma - 1)^2 \cos^2 \Theta^*]}$$

und damit endlich nach (71') für die Anzahl der Stöße, bei welchen das eine Elektron in einer Richtung zwischen  $\Theta$  und  $\Theta + d\Theta$  herausgeschleudert wird

$$(74) \quad \left\{ \begin{aligned} d\Phi(\Theta) &= \frac{2\pi e^4 \sin \Theta^* d\Theta^* 2(\gamma + 1)}{m^2 \gamma^4 v^4} \\ &\cdot \left[ \frac{4}{\sin^4 \Theta^*} - \frac{3}{\sin^2 \Theta^*} + \frac{(\gamma - 1)^2}{4\gamma^4} \left( 1 + \frac{4}{\sin^2 \Theta^*} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Die Relationen (68) geben die Verbindung zwischen  $\Theta$  und  $\Theta^*$ ; man könnte natürlich jetzt in (74) mittels (68)  $\Theta$  statt  $\Theta^*$  einführen. Das würde aber einen recht unübersichtlichen Ausdruck geben.

Die Energie der Elektronen, welche in der Richtung  $\Theta$  herausfliegen, ist nach (70) gleich

$$E_1' = \frac{mc^2}{2} [\gamma + 1 + (\gamma - 1) \cos \Theta^*],$$

während die Energie des anderen im Stoß beteiligten Elektrons gleich

$$E_2' = \frac{mc^2}{2} [\gamma + 1 - (\gamma - 1) \cos \Theta^*]$$

ist. (74) bleibt unverändert, wenn wir  $\Theta^*$  durch  $\pi - \Theta^*$  ersetzen, und zeigt also Symmetrie um den Punkt

$$\Theta^* = \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \Theta = \arctg \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}$$

[nach (68)].

Das muß man natürlich auch fordern; denn wenn bei einem Stoß das eine Elektron in der Richtung  $\Theta^*$  herausfliegt, dann hat das andere Elektron nach (67) eine Richtung  $\pi - \Theta^*$ .

Bei Vernachlässigung der Relativität, also für  $\gamma = 1$  wird  $\Theta^* = 2\Theta$  (74), geht über in

$$d\Phi(\Theta) = \frac{2\pi e^4 \sin 2\Theta \cdot 2d\Theta}{m^2 v^4} \left[ \frac{1}{\sin^4 \Theta} + \frac{1}{\cos^2 \Theta} - \frac{1}{\cos^2 \Theta \sin^2 \Theta} \right]$$

und es herrscht Symmetrie um  $\Theta = \frac{\pi}{4}$ .

Das ist die von Mott<sup>1)</sup> für die Streuung freier Elektronen bei Berücksichtigung des Austausches hergeleitete Formel.

Die Formel (74) ist einer experimentellen Prüfung zugänglich.

Durch Wilsonaufnahmen des Durchgangs schneller  $\beta$ -Strahlen durch Gase erhält man direkt die Häufigkeit der verschiedenen Stöße. Da man prinzipiell nicht unterscheiden

1) N. F. Mott, Proc. Roy. Soc. London (A) 126. S. 259. 1930.

kann, welches der beiden herausfliegenden Elektronen das ursprüngliche  $\beta$ -Teilchen ist, deutet man definitionsgemäß das Elektron mit der größten Energie nach dem Stoß als  $\beta$ -Teilchen und das mit der kleinsten Energie als Sekundärelektron. Aus dieser Definition und aus den obigen Ausdrücken  $E_1'$ ,  $E_2'$  für die Energien der beiden Elektronen erkennt man, daß ein  $\beta$ -Strahl prinzipiell nur eine Ablenkung  $\Theta^* < \frac{\pi}{2}$ , d. h.

$$\Theta < \arctg \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}$$

erhalten kann, und der Energieverlust

$$(75) \quad Q = E_1^0 - E_1' = E_2' - m c^2 = \frac{m c^2}{2} (\gamma - 1) [1 - \cos \Theta^*]$$

des  $\beta$ -Teilchens bei einem Stoß ist immer kleiner als

$$(75') \quad Q_m = \frac{m c^2 (\gamma - 1)}{2} = \frac{T}{2},$$

wobei  $T = m c^2 (\gamma - 1)$  die kinetische Energie des  $\beta$ -Strahls vor dem Stoß bedeutet,

Wir wollen jetzt mittels (75)  $Q$  statt  $\Theta^*$  in (74) als Variable einführen. Erstens ist

$$dQ = \frac{m c^2 (\gamma - 1)}{2} \sin \Theta^* d\Theta^*.$$

Weiter hat man

$$\cos \Theta^* = 1 - \frac{2Q}{m c^2 (\gamma - 1)} = 1 - 2A,$$

$$\sin^2 \Theta^* = 4A \cdot (1 - A),$$

wenn

$$(75'') \quad A = \frac{Q}{T} = \frac{Q}{m c^2 (\gamma - 1)}$$

gesetzt wird.

Die Anzahl der Stöße, wobei das  $\beta$ -Teilchen eine Energie zwischen  $Q$  und  $Q + dQ$  verliert, ist also

$$(76) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(Q) dQ &= \frac{2\pi e^4 dQ}{m v^2 Q^2 (1 - A)^2} \\ &\cdot \left\{ 1 - \left[ 3 - \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)^2 \right] A (1 - A) + \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)^2 A^2 (1 - A)^2 \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die verlorene Energie  $Q$  nimmt das Sekundärelektron auf.

Voraussetzung für die Gültigkeit von (76) war, daß die kinetische Energie  $Q$  des Sekundärelektrons größer als

$$E_K = \frac{h^2}{8\pi^2 m} K^2$$

sein sollte. Für  $Q \sim E_K$  ist nach (43)

$$A = \frac{Q}{m c^2 (\gamma - 1)} \ll 1.$$

und (76) reduziert sich auf

$$(76') \quad \Phi(Q) dQ = \frac{2\pi e^4 dQ}{m v^2 Q^2},$$

das ist die klassische Formel von Thomson und Bohr.

Durch Vergleich mit (57) sehen wir, daß die beiden verschiedenen Behandlungsweisen für  $Q > E_K$  und  $Q < E_K$  an der Grenze  $Q = E_K$  anschließende Resultate liefern.

(76') gilt nur, solange  $Q \ll m c^2 (\gamma - 1)$ , also  $A \ll 1$ .

Mit anwachsendem  $Q$  (festes  $\gamma$ ) spielen Relativitäts- und Austauscheffekte eine immer größere Rolle.

### § 5. Bremsung

Mit Hilfe der in den vorigen Paragraphen erhaltenen Ausdrücke für die Wirkungsquerschnitte lassen sich alle Fragen bezüglich der Bremsung von  $\beta$ -Strahlen beim Durchgang durch Materie mühelos beantworten.

Bei den gewöhnlichen Experimenten über die Bremsung schneller  $\beta$ -Teilchen läßt man ein Bündel homogener Strahlen senkrecht auf eine dünne<sup>1)</sup> Schicht von bremsenden Atomen fallen. Die Elektronen, welche auf der anderen Seite der Schicht herauskommen, haben eine etwas kleinere Energie als diejenigen des ursprünglichen Bündels. Sie haben aber nicht alle dieselbe Energie verloren. Trägt man die Anzahl der Elektronen mit einem Energieverlust zwischen  $\Delta T$  und  $\Delta T + d(\Delta T)$  als Funktion von  $\Delta T$  auf, erhält man im wesentlichen eine Gaußsche Fehlerkurve. Es möge der Wert von  $\Delta T$ , der dem Maximum dieser Fehlerkurve entspricht, mit  $\Delta_p T$  bezeichnet werden; das ist die Größe, welche man bei den gewöhnlichen Experimenten mißt, und deren Berechnung uns daher vor allem interessiert.

Beim Durchgang durch die bremsende Atomschicht erleidet ein  $\beta$ -Teilchen viele verschiedene Stöße mit verschiedenen Werten der übertragenen Energie  $Q$ . Die Größe  $Q$  kann teils

1) Die Dicke der Schicht soll klein sein gegenüber der totalen Reichweite der  $\beta$ -Strahlen, damit man die schwer kontrollierbaren, sekundären Effekte vernachlässigen kann.

diskrete Werte  $E_n - E_0$  ( $n = 2, 3, 4 \dots \infty$ ) und teils kontinuierliche Werte im Intervall  $-E_0 < Q < Q_m$  annehmen. Die Anzahl der Stöße mit einer Energieübertragung zwischen  $Q$  und  $Q + dQ$ , welche ein  $\beta$ -Teilchen im Mittel beim Durchqueren der Schicht erleidet, wollen wir mit  $\varphi(Q)dQ$  bezeichnen. [Handelt es sich um einen diskreten Wert von  $Q$ , soll entsprechend  $\varphi(Q)$  die mittlere Anzahl von Stößen mit einer Energieübertragung  $Q$  bedeuten.]

Wie zuerst von Bohr<sup>1)</sup> und später ausführlicher von Williams<sup>2)</sup> gezeigt wurde, spielen für die Größe  $\Delta_s T$  praktisch nur diejenigen Stöße eine Rolle, für welche die übertragene Energie  $Q$  unterhalb einer gewissen Grenze  $S$  liegt, und zwar ist in allen praktischen Fällen  $-E_0 \ll S \ll Q_m$ . Der genaue Wert von  $S$  spielt keine Rolle, wir definieren ihn wie bei Williams durch die Gleichung

$$(77) \quad \int_S^{Q_m} \varphi(Q) dQ = 1.$$

Also die Grenze  $S$  ist so bestimmt, daß die mittlere Anzahl der Stöße mit einer Energieübertragung größer als  $S$  gleich Eins, d. h. sehr klein gegen die mittlere Anzahl aller übrigen Stöße ist.

Betrachten wir nun zunächst nur diejenigen Stöße mit  $Q < S$ , dann ist der Mittelwert der von einem durchgehenden  $\beta$ -Teilchen bei solchen Stößen verlorenen Energie offenbar gleich

$$(78a) \quad \Delta_s T = \int_{Q_{\min}}^S Q \varphi(Q) dQ,$$

wo  $Q_{\min}$  die kleinste bei einem Stoß übertragbare Energie bedeutet, also gleich der Energiedifferenz der beiden niedrigsten Niveaus des bremsenden Atoms ist. Das Integral ist natürlich so zu verstehen, daß man in dem diskreten Teil des  $Q$ -Bereiches die Integration durch eine Summation über die  $Q$ -Werte zu ersetzen hat.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein  $\beta$ -Teilchen durch Stöße von der betrachteten Art ( $Q < S$ ) eine Energie zwischen  $(1+z)\Delta_s T$  und  $(1+z+dz)\Delta_s T$  verliert, ist dann nach wohlbekannten Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung gleich

$$(78) \quad A(z) dz = \sqrt{\frac{(\Delta_s T)^2}{2\pi P_s}} \cdot e^{-\frac{(\Delta_s T)^2 z^2}{2P_s}} \cdot dz,$$

1) N. Bohr, Phil. Mag. **30**. S. 581. 1915.

2) E. J. Williams, Proc. Roy. Soc. London A. Vol. **125**. S. 420. 1929.

wo

$$(78b) \quad P_s = \int_{Q_{\min}}^S Q^2 \varphi(Q) dQ$$

und  $\Delta_s T$  durch (78a) dargestellt ist.

Die Bedingung für die Gültigkeit von (78) ist, daß das Verhältnis zwischen der mittleren Anzahl Stöße  $\varphi(Q) dQ$  mit einer Energieübertragung im Intervall  $(Q, Q + dQ)$  und der prozentualen Änderung  $dQ/Q$  der Größe  $Q$  innerhalb dieses Intervalls, groß gegen Eins ist, also

$$(78c) \quad Q \varphi(Q) \gg 1.$$

Die Größe  $\varphi(Q)$  steigt mit abnehmendem  $Q$  stark an; die Bedingung (78c) ist daher am besten für kleine  $Q$  erfüllt, und die Grenze  $S$  ist nun gerade so gewählt, daß man für die Stöße mit  $Q < S$  die Bedingung (78c) als erfüllt ansehen kann.

Wenn also die Wahrscheinlichkeit der harten Stöße mit  $Q > S$  gleich Null wäre, würde (78) uns direkt die Geschwindigkeitsverteilung der aus der Schicht heraustretenden  $\beta$ -Strahlen liefern.

In Wirklichkeit sind nun die Stöße mit  $Q > S$  nicht ganz ausgeschlossen, aber sie sind doch äußerst unwahrscheinlich im Verhältnis zu den Stößen mit  $Q < S$ . Die Berücksichtigung der harten Stöße ändert daher nach Bohr und Williams nicht sehr viel an der Verteilung (78). Das Maximum liegt praktisch unverändert an der Stelle  $\Delta T = \Delta_s T$ , so daß die gesuchte Größe  $\Delta_p T = \Delta_s T$  ist. Auch die Breite des Maximums ist nahezu unverändert durch  $P_s$  bestimmt. Nur die genaue Symmetrie um  $z = 0$  geht verloren, indem die exakte Verteilungskurve für große  $z$  nicht so rasch abfällt, wie (78) angibt.

Wir gehen jetzt zur Berechnung der Größe (78a) über. Die Funktion  $\varphi(Q)$  erhalten wir unmittelbar aus den in §§ 2 und 4 entwickelten Ausdrücken für die Wirkungsquerschnitte. Ist  $N$  die Anzahl der Atome pro Quadratzentimeter und  $\Delta x$  die Schichtdicke, dann ist für  $Q > E_K - E_0$

$$\varphi(Q) = N \Delta x \cdot \Phi(Q),$$

wo  $\Phi(Q)$  die durch (76) dargestellte Größe ist.

Für  $-E_0 < Q < E_K - E_0$  ist in derselben Weise nach (51)

$$\varphi(Q) dQ = N \Delta x \cdot dk \Phi_k = N \Delta x dk \int_{Q_{\min}}^{Q_1} d\Phi_k(q),$$

wo

$$Q = E_k - E_0 = \frac{h^2}{8\pi^2 m} k^2 - E_0, \quad dQ = \frac{h^2}{4\pi^2 m} k dk$$

und

$$d\Phi_k(q) = d\Phi_n(q)$$

durch (46) dargestellt ist. Während  $Q$  das Intervall

$$-E_0 < Q < E_K - E_0$$

durchläuft, geht  $k$  von 0 bis  $K$ .

Für diskrete Werte von  $Q$  ist schließlich

$$\varphi(Q) = N \Delta x \Phi_n = N \Delta x \int_{q_{\min}}^{q_1} d\Phi_n(q),$$

wo  $Q = E_n - E_0$  und  $d\Phi_n(q)$  wieder durch (46) gegeben ist. Wir erhalten also für  $\Delta_P T = \Delta_S T$  nach (78a) den Ausdruck

$$(79) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_P T &= N \Delta x \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} (E_n - E_0) \int_{q_{\min}}^{q_1} d\Phi_n(q) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^K dk (E_k - E_0) \int_{q_{\min}}^{q_1} d\Phi_k(q) + \int_{E_K - E_0}^S Q \Phi(Q) dQ \right\} \\ &= N \Delta x \left\{ \sum_{n=2}^K \int_{q_{\min}}^{2K} (E_n - E_0) d\Phi_n(q) + \int_{E_K - E_0}^S Q \Phi(Q) dQ \right\}, \\ &\quad q_1 = 2K. \end{aligned} \right.$$

$\sum_{n=2}^K$  bedeutet also Summation über die diskreten Zustände von  $n = 2$  bis  $\infty$  und Integration über die kontinuierlichen von  $k = 0$  bis  $k = K$ .

Da, wie erwähnt, in allen vorkommenden Fällen  $S \ll Q_m$ , können wir nach § 4 in dem letzten Glied auf der rechten Seite von (79) den Ausdruck (76) für  $\Phi(Q)$  durch den einfachen klassischen Ausdruck (76') ersetzen. Also

$$\int_{E_K - E_0}^S Q \Phi(Q) dQ = \frac{2\pi e^4}{m v^4} \ln Q \Big|_{E_K - E_0}^S = \frac{2\pi e^4}{m v^4} \ln \frac{S}{E_K}, \quad \text{da } E_K \gg E_0.$$



Der Wert von  $S$  ergibt sich in derselben Weise aus der Bedingung (77) zu

$$(80') \quad S = \frac{2\pi N \Delta x e^4}{m v^2}.$$

Also erhalten wir schließlich

$$(80) \quad \int_{E_K - E_0}^S Q \Phi(Q) dQ = \frac{2\pi e^4}{m v^2} \ln \frac{2\pi e^4 N \Delta x}{m v^2 \cdot E_K}.$$

Wir haben jetzt die Größe

$$(81) \quad J = \sum_{n=2}^K \int_{q_{\min}}^{2K} (E_n - E_0) d\Phi_n(q)$$

in dem ersten Glied der rechten Seite von (79) zu berechnen. Hier muß man berücksichtigen, daß die untere Grenze  $q_{\min}$  nach (44) von  $n$  abhängt.

$$(82) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_{\min} = \frac{\alpha_0^2 n \sqrt{\pi^2 + k_1^2}}{2\pi k_1^2}, \quad \alpha_0^2 n = \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad n=2,3,\dots \\ \alpha_0^2 k = \alpha^2 + k^2. \end{array} \right.$$

Wir bestimmen eine Größe  $q_0$  derart, daß

$$(82a) \quad q_0 \ll \alpha$$

und gleichzeitig

$$(82b) \quad q_0^2 \gg \left( \frac{\alpha^2 + (3\alpha)^2}{2\pi} \right)^2 \frac{\pi^2 + k_1^2}{k_1^2}$$

und

$$(82c) \quad q_0^2 \gg \left( \frac{\alpha^2 + (3\alpha)^2}{2\pi} \right)^2.$$

Diese Bedingungen sind offenbar wegen

$$\frac{\alpha^2}{\pi^2} \ll 1 \quad \text{und} \quad \frac{\alpha^2}{k_1^2} \ll 1$$

sehr wohl erfüllbar. Wir zerlegen dann  $J$  in drei Teile  $J_1, J_2, J_3$  nach dem folgenden Schema

$$(81') \quad \left\{ \begin{array}{l} J = \sum_{n=2}^{K_0} \int_{q_{\min}}^{q_0} (E_n - E_0) d\Phi_n(q) + \sum_{n=2}^K \int_{q_0}^{K/2} (E_n - E_0) d\Phi_n(q) \\ \quad + \sum_{n=2}^K \int_{K/2}^{2K} (E_n - E_0) d\Phi_n(q) = J_1 + J_2 + J_3. \end{array} \right.$$

In  $J_1$  ist die obere Grenze  $k^0$  in der Summation über die Zustände dadurch bestimmt, daß für  $k = k_0$ , das entsprechende durch (82) gegebene  $q_{\min}$  gleich  $q_0$  ist, also es ist

$$(83) \quad k_0^2 = \frac{2\pi k_1^0 q_0}{\sqrt{\pi^2 + k_1^{02}}} - \alpha^2 \gg \alpha^2 \quad (\text{nach } 82b).$$

Wegen (82a) können wir in dem Integral  $J_1$  für  $d\Phi_n(q)$  statt (46) den einfacheren Ausdruck (46c) setzen, also

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{8\pi\alpha^2\gamma^2}{k_1^{02}} \sum_{n=2}^{k_0} (E_n - E_0) |x_{0n}|^2 \int_{q_{\min}}^{q_0} q dq \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{1}{q^2 - \left(\frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi}\right)^2} - \frac{\frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi}\right)^2}{\left[q^2 - \left(\frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi}\right)^2\right]^2} \right\} \\ &= \frac{4\pi\alpha^2\gamma^2}{k_1^{02}} \sum_{n=2}^{k_0} (E_n - E_0) |x_{0n}|^2 \\ &\quad \cdot \left| \ln \left[ q^2 - \left(\frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi}\right)^2 \right] + \frac{\frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi}\right)^2}{q^2 - \left(\frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi}\right)^2} \right|_{q_{\min}}^{q_0} \end{aligned}$$

und mit Berücksichtigung von (82)

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{4\pi\alpha^2\gamma^2}{k_1^{02}} \sum_{n=2}^{k_0} (E_n - E_0) |x_{0n}|^2 \\ &\quad \cdot \left\{ \ln \frac{q_0^2 - \left(\frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi}\right)^2}{\left(\frac{\alpha_{0n}^2}{2k_1^0}\right)^2} + \frac{\frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi}\right)^2}{q_0^2 - \left(\frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi}\right)^2} - \frac{v^2}{c^2} \right\}. \end{aligned}$$

Die Größen  $|x_{0n}|^2$  nehmen mit wachsender Höhe des Zustandes  $n$  sehr stark ab [vgl. (48) und (49)] und eine einfache Betrachtung zeigt, daß man bei der Summation über die Zustände in dem Ausdruck für  $J_1$  nichts Wesentliches ändert, wenn man die Zustände mit, sagen wir,  $k > 3\alpha$  vernachlässigt. Für alle übrigbleibenden Zustände gilt dann nach (82c)

$$q_0^2 \gg \left(\frac{\alpha_{0n}^2}{2\pi}\right)^2$$

und der Ausdruck für  $J_1$  wird einfach

$$(83a) \quad \left\{ \begin{aligned} J_1 &= \frac{4\pi\alpha^2\gamma^2}{k_1^{02}} \sum_{n=2}^{k=3\alpha} (E_n - E_0) |x_{0n}|^2 \left\{ \ln \frac{q_0^2}{\left(\frac{\alpha_{0n}^2}{2k_1^0}\right)^2} - \frac{v^2}{c^2} \right\} \\ &= \frac{4\pi\alpha^2\gamma^2}{k_1^{02}} \sum_n (E_n - E_0) |x_{0n}|^2 \left\{ \ln \frac{q_0^2}{\left(\frac{\alpha_{0n}^2}{2k_1^0}\right)^2} - \frac{v^2}{c^2} \right\}, \end{aligned} \right.$$

wo  $\sum_n$  Summation über sämtliche diskreten und kontinuierlichen Zustände des Atoms bedeutet; wegen des erwähnten starken Verschwindens der Größen  $|x_{0n}|^2$  bei hohen Zuständen ist es nämlich gleichgültig, ob wir bis zum Zustand  $k = 3\alpha$  oder über alle Zustände bis  $k = \infty$  summieren.

Nach dem gewöhnlichen  $f$ -Sommensatz ist aber

$$\sum_n \frac{\alpha^2}{R\hbar} (E_n - E_0) |x_{0n}|^2 = 1.$$

Also erhalten wir

$$(83'a) \quad \left\{ \begin{aligned} J_1 &= \frac{4\pi\gamma^2\alpha^2}{k_1^{02}} \sum_n (E_n - E_0) |x_{0n}|^2 \left\{ \ln \left( \frac{2k_1^0 q_0}{\alpha^2} \right)^2 - \frac{v^2}{c^2} \right\} \\ &\quad - \frac{4\pi\gamma^2\alpha^2}{k_1^{02}} \sum_n (E_n - E_0) |x_{0n}|^2 \ln \left( \frac{\alpha_{0n}^2}{\alpha^2} \right)^2 \\ &= \frac{4\pi\gamma^2 R\hbar}{k_1^{02}} \left\{ \ln \left( \frac{2k_1^0 q_0}{\alpha^2 a} \right)^2 - \frac{v^2}{c^2} \right\}, \end{aligned} \right.$$

wo die Konstante  $a$  durch

$$\ln a = \sum_n \frac{E_n - E_0}{R\hbar} \alpha^2 |x_{0n}|^2 \ln \frac{\alpha_{0n}^2}{\alpha^2}$$

definiert ist.

Die Größe  $a$  tritt auch in den nichtrelativistischen Rechnungen auf und ist von Bethe<sup>1)</sup> ausgewertet worden.

Er findet den Wert

$$a = 1,105.$$

Bei der Berechnung von  $J_2$  in (81') vertauschen wir Summation und Integration, also erhalten wir

$$(84) \quad J_2 = \int_{q_0}^{K/2} \sum_{n=2}^{k=k_{\max}} (E_n - E_0) d\Phi_n(q),$$

1) H. Bethe, a. a. O.

die obere Grenze  $k_{\max}$  hängt von  $q$  ab und ist analog zu (83) durch

$$(83') \quad k_{\max}^2 = \frac{2\pi k_1^0 q}{\sqrt{x^2 + k_1^{02}}} - \alpha^2 \gg \left\{ \frac{n^2}{q^2} \right.$$

dargestellt solange

$$q < \frac{(\alpha^2 + K^2) \sqrt{x^2 + k_1^{02}}}{2\pi k_1^0} = q_K < \frac{K}{2}$$

und im Intervall  $q_K < q < \frac{K}{2}$  ist  $k_{\max}$  konstant gleich  $K$ .

Es handelt sich nun zunächst um die Auswertung der Größe

$$(84a) \quad f(q) dq = \sum_{n=2}^{k=k_{\max}} (E_n - E_0) d\Phi_n(q)$$

für alle  $q$  im Intervall  $q_0 < q < \frac{K}{2}$ .

Für  $q = q_0$  ist nach (82a, c), (46a, c) und (49) der Ausdruck (46) für  $d\Phi_n(q)$  äquivalent mit (46a) jedenfalls solange wir nur solche  $n$ -Zustände betrachten, deren Energie unterhalb  $E_k = E_{3,n}$  liegt; also für  $q \sim q_0$  und für die Zustände, welche bei der Summation in (84) oder (84a) überhaupt einen merklichen Beitrag liefern, können wir Retardation und Spinwechselwirkung vernachlässigen.

Für  $q > q_0$  ist dies a fortiori erlaubt und wir können in der Summe (84a) für  $d\Phi_n(q)$  den Ausdruck (46a) benutzen, also

$$f(q) = \frac{8\pi \alpha^2 \gamma^2}{k_1^{02}} \cdot \frac{1}{q^3} \sum_{n=2}^{k=k_{\max}} (E_n - E_0) |\varepsilon_n(q)|^2.$$

Der Ausdruck (48b) zeigt, daß  $|\varepsilon_n(q)|^2 = |\varepsilon_k(q)|^2$  für  $k > q$  mit wachsendem  $k$  ungeheuer steil abfällt, es ist daher für  $q < \frac{K}{2}$  gleichgültig, ob wir bis  $k = k_{\max}$  oder bis  $k = \infty$  summieren, also ist

$$(84b) \quad f(q) = \frac{8\pi \gamma^2 \alpha^2}{k_1^{02}} \cdot \frac{1}{q^3} \sum_n (E_n - E_0) |\varepsilon_n(q)|^2,$$

wo  $\sum_n$  wieder Summation über sämtliche diskreten und kontinuierlichen Zustände des Atoms bedeutet.

Nach dem von Bethe<sup>1)</sup> bewiesenen verallgemeinerten  $f$ -Sommensatz ist aber

$$(84c) \quad \frac{\alpha^2}{q^2 R h} \sum_n (E_n - E_0) |\varepsilon_n(q)|^2 = 1$$

für alle  $q$ .

Also

$$f(q) = \frac{8\pi\gamma^2}{k_1^{02}} \frac{R h}{q}$$

und nach (84)

$$(83'b) \quad J_2 = \frac{8\pi\gamma^2 R h}{k_1^{02}} \int_{q_0}^{K/2} \frac{dq}{q} = \frac{4\pi\gamma^2 R h}{k_1^{02}} \ln \left( \frac{K}{2q_0} \right)^2.$$

In dem dritten Integral  $J_3$  in (81') ist  $q$  im ganzen Intervall

$$\frac{K}{2} < q < 2K$$

sehr groß gegen  $\alpha \cdot d\Phi_n(q)$  ist daher einfach durch (46b) dargestellt. Also wenn wir wieder Summation und Integration vertauschen

$$J_3 = \frac{8\pi\alpha^2\gamma^2}{k_1^{02}} \int_{K/2}^{2K} dq \sum_{n=2}^K \frac{(E_n - E_0) q |\varepsilon_n(q)|^2}{\left[ q^2 - \left( \frac{\alpha^2 n}{2x} \right)^2 \right]}.$$

Aus den Ausdrücken (48a, b) für  $|\varepsilon_n(q)|^2$  erkennt man sofort, daß die diskreten Niveaus in dieser Summe keinen merklichen Beitrag liefern, wir erhalten dann

$$J_3 = \frac{8\pi\alpha^2\gamma^2}{k_1^{02}} \int_{K/2}^{2K} dq \int_0^K dk \frac{(E_k - E_0) q |\varepsilon_k(q)|^2}{\left[ q^2 - \left( \frac{\alpha^2 + k^2}{2x} \right)^2 \right]}.$$

Weiter hat der Faktor  $\frac{\alpha^5}{[(q-k)^2 + \alpha^2]^3}$  in (48b) für  $q \gg \alpha$  den Charakter einer Diracschen  $\delta$ -Funktion  $N \delta(q-k)$ , so daß von den kontinuierlichen Zuständen auch nur diejenigen mit  $k$  in der Nähe von  $q$  in Betracht kommen.

Der Normierungsfaktor  $N$  ist gleich

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^5}{[(q-k)^2 + \alpha^2]^3} dk = \frac{3\pi}{8} \quad (\text{vgl. § 3, S. 26}).$$

1) H. Bethe, a. a. O., S. 352.

Für  $|\epsilon_k(q)|^2$  erhält man also in dem vorliegenden Fall  $q \gg \alpha$  nach (48b) den Ausdruck

$$|\epsilon_k(q)|^2 = \delta(q - k)$$

und für  $J_3$

$$J_3 = \frac{8\pi\alpha^2\gamma^2}{k_1^{\circ 2}} \int_{K/2}^{2K} dq \int_0^K dk \frac{(E_q - E_0) q \delta(q - k)}{\left[q^2 - \left(\frac{\alpha^2 + q^2}{2\pi}\right)^2\right]^2}.$$

Da

$$q^2 \gg \left(\frac{\alpha^2 + q^2}{2\pi}\right)^2 \sim \left(\frac{q^2}{2\pi}\right)^2 \quad \text{für} \quad \alpha^2 \ll \left(\frac{K}{2}\right)^2 < q^2 < K^2 \ll \pi^2$$

können wir auch hier das Retardationsglied  $\left(\frac{\alpha^2 + q^2}{2\pi}\right)^2$  vernachlässigen. Nun ist offenbar

$$\int_0^K dk \delta(q - k) \frac{E_q - E_0}{q^3} = \begin{cases} \frac{E_q - E_0}{q^3} & \text{für } q < K \\ 0 & \text{für } q > K \end{cases}.$$

Also unter Berücksichtigung von (38), (38')

$$(83c) \quad \left\{ \begin{aligned} J_3 &= \frac{8\pi\alpha^2\gamma^2}{k_1^{\circ 2}} \int_{K/2}^K dq \frac{\frac{h^2}{8\pi^2 m} (q^2 + \alpha^2)}{q^3} \\ &= \frac{8\pi\gamma^2\alpha^2}{k_1^{\circ 2}} R h \int_{K/2}^K \frac{\frac{q^2}{\alpha^2} + 1}{q^3} dq \end{aligned} \right.$$

und da  $\frac{q^2}{\alpha^2} \gg 1$  im ganzen Intervall

$$(83'c) \quad J_3 = \frac{4\pi\gamma^2 R h}{k_1^{\circ 2}} \ln 4.$$

Durch Summation der Ausdrücke (83'a, b, c) ergibt sich für die Größe (81) oder (81')

$$\begin{aligned} J &= \frac{4\pi\gamma^2 R h}{k_1^{\circ 2}} \left[ \ln \left( \frac{2k_1^{\circ} q_0}{\alpha^2 a} \right)^2 - \frac{v^2}{c^2} + \ln \left( \frac{K}{2q_0} \right)^2 + \ln 4 \right] \\ &= \frac{2\pi e^4}{m v^2} \left[ \ln \left( \frac{2k_1^{\circ} K}{a \alpha^2} \right)^2 - \frac{v^2}{c^2} \right] \end{aligned}$$

und nach (38')

$$J = \frac{2\pi e^4}{m v^2} \left[ \ln \frac{2m v^2 \gamma^2 E_K}{R^2 h^2 \alpha^2} - \frac{v^2}{c^2} \right].$$

Die gesuchte Größe  $\Delta_P T$  wird dann schließlich nach (79) und (80)

$$(85) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_P T &= \frac{2\pi e^4 N \Delta x}{m v^2} \left[ \ln \frac{4\pi N \Delta x e^4}{a^2 R^2 h^2} - \ln \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{v^4}{c^2} \right] \\ &= \frac{2\pi e^4 N \Delta x}{m v^2} \left\{ \ln \left[ \frac{4 N \Delta x \cdot v^4}{a^2 4\pi R^2} \left( \frac{2\pi e^2}{h v} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \ln \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{v^4}{c^2} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Nach der klassischen Theorie von Bohr ist

$$(86) \quad \Delta_P T = \frac{2\pi e^4 N \Delta x}{m v^2} \left[ \ln \frac{\mu^2 v^2 N \Delta x}{4\pi v_0^2} - \ln \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{v^4}{c^2} \right],$$

wo  $\mu$  eine numerische Konstante vom Betrag  $\mu = 1,123$  ist. Der Unterschied zwischen der quantentheoretischen Formel (85) und der klassischen (86) besteht also im wesentlichen darin, daß unter dem Logarithmus in (85) ein Faktor  $\left( \frac{2\pi e^2}{h v} \right)^2$  auftritt. Dieser Unterschied besteht schon im nichtrelativistischen Gebiet. Die Relativitätsglieder sind dagegen in den beiden Theorien genau dieselben. Der Faktor  $\left( \frac{2\pi e^2}{h v} \right)^2$ , welcher für schnelle  $\beta$ -Strahlen praktisch gleich dem Quadrat der Feinstrukturkonstante ist, bewirkt, daß  $\Delta_P T$  quantenmechanisch etwas kleiner wird als nach der klassischen Theorie.

In einer neulich erschienenen Arbeit hat Williams<sup>1)</sup> durch Kombination der nichtrelativistischen quantenmechanischen Formel von Bethe mit der klassischen Formel von Bohr einen Ausdruck für die Bremsung angegeben, der ganz mit (85) übereinstimmt.

Die Formel (85), welche für Wasserstoff hergeleitet wurde, läßt sich mühelos auf den Fall komplizierterer Atome verallgemeinern. Handelt es sich um Atome mit der Kernladungszahl  $Z$ , erhält man statt (85) einfach

$$(85') \quad \Delta_P T = \frac{2\pi Z e^4 N \Delta x}{m v^2} \left\{ \ln \frac{4\pi N \Delta x e^4}{J^2} - \ln \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{v^4}{c^2} \right\},$$

wo  $J$  das bei Bethe<sup>2)</sup> näher definierte „mittlere Ionisierungspotential“ eines Elektrons in dem betrachteten Atom bedeutet. Für den Vergleich von (85') mit den Experimenten können wir auf die erwähnte Arbeit von Williams verweisen. Die Übereinstimmung ist befriedigend.

1) E. J. Williams, Proc. Roy. Soc. (A) **135**. S. 108. 1932.

2) H. Bethe, a. a. O., S. 375.

Für die Größe  $\Delta_P T$  spielt der Austausch keine Rolle; denn Austauscheffekte kommen, wie wir gesehen haben, nur für Stöße mit  $Q > S$  in Frage.

Anders verhält es sich mit der im Mittel verlorenen Energie  $\Delta_m T$ . Wie erwähnt, stellt die Gl. (78) nicht exakt die Verschwindigkeitsverteilung der durchgehenden  $\beta$ -Strahlen dar, sondern die wirkliche Verteilung ist unsymmetrisch in bezug auf  $z = 0$ . Das bewirkt  $\Delta_m T > \Delta_P T$ . Für  $\Delta_m T$  haben wir in Analogie mit (78a) den Ausdruck:

$$\Delta_m T = \int_{Q_{\min}}^{Q_m} Q \varphi(Q) dQ,$$

wo aber jetzt über *alle* Stöße bis  $Q = Q_m$  zu integrieren ist.

$Q_m$  ist die durch (75') dargestellte Größe und bedeutet also die maximale Energie, welche ein  $\beta$ -Teilchen bei einem Stoß verlieren kann.

Es ist also:

$$(87) \quad \Delta = \Delta_m T - \Delta_P T = \int_S^{Q_m} Q \varphi(Q) dQ = N \Delta x \int_S^{Q_m} Q \Phi(Q) dQ,$$

wo  $\Phi(Q)$  durch (76) gegeben ist.

Da die Größe  $\Delta_m T$  für die Experimente keine so direkte Bedeutung hat wie  $\Delta_P T$ , wollen wir die Rechnungen nur für den Grenzfall  $\gamma = 1$  (langsame  $\beta$ -Teilchen) durchführen. Aus (87), (76) und (75') erhalten wir dann:

$$\Delta = N \Delta x \frac{2\pi e^4}{m v^2} \int_{A_S}^{1/2} dA \left( \frac{1}{A(1-A)^2} - \frac{3}{1-A} \right),$$

$$A = \frac{Q}{T}, \quad A_S = \frac{S}{T} \ll 1$$

und da  $T = \frac{1}{2} m v^2$  im nichtrelativistischen Fall:

$$\Delta = \frac{2\pi e^4 N \Delta x}{m v^2} \left\{ \ln \frac{m v^2 s}{16 S^2} \right\},$$

wo  $e$  die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet.

Für  $\Delta_m T$  ergibt sich dann mittels (85), (87) und (80):

$$(87a) \quad \Delta_m T = \frac{2\pi e^4 N \Delta x}{m v^2} \ln \left( \frac{m^2 v^4 s}{a^2 R^2 h^2 \cdot 8} \right).$$



Durch Vergleich mit der Betheschen Formel<sup>1)</sup>:

$$(87'a) \quad \Delta_m T = \frac{2\pi e^4 N \Delta x}{m v^2} \ln \left( \frac{m^2 v^4}{a^2 R^2 h^2} \right),$$

welche unter Vernachlässigung der Austauscheffekte hergeleitet ist, sieht man, daß letztere keine besonders große Rolle spielen. Immerhin wirken sie in der richtigen Richtung, indem sie eine Verkleinerung von  $\Delta_m T$  hervorrufen.

### § 6. Primäre Ionisation

Wir fragen jetzt nach der mittleren Anzahl  $\Delta s$  von primären Ionen, welche ein  $\beta$ -Teilchen auf einem Stück  $\Delta x$  seiner Bahn durch eine Wilsonkammer erzeugt. Wir berechnen zunächst die mittlere Anzahl  $\Delta \varphi$  aller unelastischen Stöße, welche das  $\beta$ -Teilchen auf der Strecke  $\Delta x$  erleidet. Diese Anzahl ist offenbar:

$$\Delta \varphi = \int_{Q_{\min}}^{Q_m} \varphi(Q) dQ,$$

wo  $\varphi(Q)$  und die Integration über  $Q$ , die in § 5, S. 571, 572 definierte Bedeutung haben.

Also:

$$(88) \quad \Delta \varphi = N \Delta x \left\{ \sum_{n=2}^K \int_{q_{\min}}^{2K} d\Phi_n(q) + \int_{E_K - E_0}^{Q_m} \Phi(Q) dQ \right\}.$$

Die Größe:

$$(89) \quad \left\{ \begin{aligned} J' &= \sum_{n=2}^K \int_{q_{\min}}^{2K} d\Phi_n(q) = \sum_{n=2}^{k_0} \int_{q_{\min}}^{q_0} d\Phi_n(q) \\ &+ \sum_{n=2}^K \int_{q_0}^{K/2} d\Phi_n(q) + \sum_{n=2}^K \int_{K/2}^{2K} d\Phi_n(q) = J_1' + J_2' + J_3' \end{aligned} \right.$$

hat einen zu (81) ganz analogen Bau, es fehlt bloß der Faktor  $E_n - E_0$  im Integranden. Wir zerlegen sie daher durch Aufteilung des Integrationsintervalls von  $q$  ganz wie in (81') in drei zu  $J_1, J_2, J_3$  analoge Teile  $J_1', J_2', J_3'$ .

Durch Wiederholung der Überlegungen, welche zu dem Ausdruck (83a) für  $J_1$  führten, erhalten wir für  $J_1'$ :

$$(89a) \quad J_1' = \frac{4\pi \gamma^2 \alpha^2}{k_1^0{}^2} \sum_n |x_{0n}|^2 \left\{ \ln \frac{q_0^2}{\left( \frac{\alpha_{0n}^2}{2k_1^0} \right)^2} - \frac{v^2}{c^2} \right\}.$$

1) H. Bethe, a. a. O.

Mit Hilfe der Vollständigkeitsrelationen für die Eigenfunktionen des Atoms beweist man leicht die folgende Relation<sup>1)</sup>:

$$(90) \quad \sum_n |\varepsilon_n(q)|^2 = 1 - F^2; \quad F = \frac{1}{\left(1 + \frac{q^2}{4\alpha^2}\right)^2}.$$

Für  $\frac{q^2}{\alpha^2} \ll 1$  ergibt das unter Benutzung von (49):

$$\sum_n |x_{0n}|^2 = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Also:

$$(89'a) \quad J_1' = \frac{4\pi\gamma^2}{k_1^{\circ 2}} \left\{ \ln \left( \frac{2k_1^{\circ} q_0}{\alpha^2} \right)^2 - \frac{v^2}{c^2} - \sum_n \alpha^2 |x_{0n}|^2 \ln \left( \frac{\alpha_{0n}^2}{\alpha^2} \right)^2 \right\}.$$

Ebenso erhalten wir für  $J_2'$  einen Ausdruck der Form:

$$J_2' = \int_{q_0}^{K/2} g(q) dq,$$

wo  $g(q)$  in Analogie zu dem Ausdruck (84b) durch

$$g(q) = \frac{8\pi\gamma^2\alpha^2}{k_1^{\circ 2}} \frac{1}{q^3} \sum_n |\varepsilon_n(q)|^2$$

dargestellt ist.

Also mit (90):

$$g(q) = \frac{8\pi\gamma^2\alpha^2}{k_1^{\circ 2}} \frac{1 - F(q)^2}{q^3}$$

und

$$(89'b) \quad \left\{ \begin{aligned} J_2' &= \frac{8\pi\gamma^2\alpha^2}{k_1^{\circ 2}} \int_{q_0}^{K/2} \frac{dq}{q^3} \left[ 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{q^2}{4\alpha^2}\right)^4} \right] \\ &= \frac{4\pi\gamma^2}{k_1^{\circ 2}} \left\{ \ln \frac{4\alpha^2}{q_0^2} - \frac{13}{12} \right\} \end{aligned} \right.$$

unter Berücksichtigung von  $\left(\frac{K}{2\alpha}\right)^2 \gg 1$ .

Endlich ergibt sich für  $J_3'$  in Analogie zu dem Ausdruck (83c) für  $J_3$ :

$$J_3' = \frac{8\pi\alpha^2\gamma^2}{k_1^{\circ 2}} \int_{K/2}^K dq \frac{1}{q^3} = \frac{4\pi\gamma^2}{k_1^{\circ 2}} \frac{3\alpha^2}{K^2}.$$

1) H. Bethe, a. a. O.

Durch Vergleich mit den Ausdrücken (80'a, b) für  $J_1'$  und  $J_2'$  sieht man, daß

$$\frac{J_2'}{J_1' + J_2'} \ll 1$$

wegen

$$\frac{\alpha^2}{K^2} \ll 1.$$

Wir erhalten also nach (89), (89'a, b):

$$(91) \quad \begin{cases} J' = \frac{4\pi\gamma^2}{k_1^{02}} \left\{ \ln \frac{4k_1^{02}}{\alpha^2 b} - \frac{v^2}{c^2} \right\} \\ \quad = \frac{2\pi e^4}{R h m v^2} \left\{ \ln \frac{2m v^2}{b R h} - \ln \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{v^2}{c^2} \right\}, \end{cases}$$

wo die Konstante  $b$  durch

$$(91a) \quad \ln b = -\ln 4 + \frac{13}{12} + \sum_n \alpha^2 |x_{0n}|^2 \ln \left( \frac{\alpha_{0n}^2}{\alpha^2} \right)^2$$

definiert ist.

(91) stellt das erste Glied in der Klammer von (88) dar, das letzte Glied dieser Klammer ist wie man leicht sieht vernachlässigbar, weil die Stöße mit  $Q > E_K - E_0$  sehr selten sind.

Also haben wir einfach

$$(92) \quad \Delta \varphi = \frac{2\pi e^4 N \Delta x}{R h m v^2} \left\{ \ln \frac{2m v^2}{b R h} - \ln \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{v^2}{c^2} \right\}.$$

Für  $\frac{v^2}{c^2} \rightarrow 0$  geht das in die Bethesche Formel über. Aus Bethes Rechnungen können wir auch den numerischen Wert der durch (91a) definierten Konstante  $b$  entnehmen. Es ist

$$b = 0,638.$$

Um nun die mittlere Anzahl  $\Delta s$  derjenigen Stöße zu erhalten, welche Ionisation zur Folge haben, müssen wir von  $\Delta \varphi$  die Anzahl  $\Delta \Phi$  der Stöße, welche bloß Anregung zu einem diskreten Niveau bewirken, abziehen. Es ist offenbar

$$\Delta \Phi = N \Delta x \sum_{n=2}^{\infty} \Phi_n,$$

wo die  $\Phi$  die in § 3 berechneten Gesamtquerschnitte sind und die Summation über alle diskreten Niveaus zu erstrecken ist. Mit Benutzung von (54b) erhält man:

$$\Delta \Phi = 0,715 \frac{2\pi e^4 N \Delta x}{R h m v^2} \left\{ \ln \frac{2m v^2}{1,79 R h} - \ln \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{v^2}{c^2} \right\}.$$

Also schließlich für die Anzahl primärer Ionen:

$$(93) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta s = \Delta \varphi - \Delta \Phi &= 0,285 \frac{2 \pi e^4 N \Delta x}{R h m v^2} \\ &\cdot \left\{ \ln \frac{2 m v^2}{0,048 R h} - \ln \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{v^2}{c^2} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Auch diese Formel ist schon von Williams in der S. 580 zitierten Arbeit vermutet worden, er vergleicht sie auch mit den bisher allerdings recht spärlichen Messungen der von einem  $\beta$ -Teilchen beim Durchgang durch eine Wilsonkammer erzeugten primären Ionen. Die Übereinstimmung ist befriedigend.

Zum Schluß möchte ich Hrn. Prof. N. Bohr für viele freundliche Ratschläge und Besprechungen herzlichst danken.

Kopenhagen, Universitetets Institut for teoretisk Fysik, April 1932.

(Eingegangen 3. Mai 1932)

**Bemerkungen zu einer Arbeit  
von Karl F. Lindman<sup>1)</sup>:**

**„Über die elektrischen Eigenschwingungen  
stabförmiger Leiter“**

**Von Erik Hallén**

In seiner oben angeführten Arbeit hat Lindman eine ausführliche Vergleichung angestellt zwischen eigenen experimentellen Resultaten und Formeln, die auf Grund der Maxwell'schen Gleichungen von Abraham<sup>2)</sup>, Oseen<sup>3)</sup> und Hallén<sup>4)</sup> hergeleitet worden sind. Zunächst sei hier über die Formeln dieser drei Verff. folgendes hervorgehoben: Sämtliche geben alle gesuchten Größen wie Stromform, Wellenlänge und Dämpfungsdekrement in Form von Potenzreihen von  $1/\Omega$ , wo  $\Omega = 2 \log \text{nat} \frac{l}{\rho}$ ,  $l$  Drahtlänge,  $\rho$  Drahtradius, wovon nur wenige Glieder berechnet worden sind, gegebenenfalls nur eines. Dies begrenzt die Gültigkeit der Formeln auf den Fall, daß  $l/\rho$  äußerst groß ist. Ich habe auch ein Beispiel<sup>5)</sup> gegeben, wie große Fehler durch das Benutzen von nur einem einzigen Glied entstehen können. Weiter sei bemerkt, daß kein Unterschied betreffs des Resultats zwischen den dreien vorliegt. Sämtliche Resultate, die Abraham für ein dünnes Ellipsoid erhalten hat, sind genau<sup>6)</sup> in von mir hergeleiteten allgemeineren Formeln für einen Draht mit willkürlich längs des Drahtes variierendem Querschnittsradius enthalten. Die entsprechenden Formeln Oseens für einen Zylinder sind ebenfalls<sup>7)</sup> in ihnen enthalten, nur daß Oseen weniger Glieder der obengenannten Reihen bestimmt hat. Der einzige übrigebleibende Gegensatz ist, daß Abraham vermutet, daß seine Formeln auch für einen zylindrischen Draht gültig sind, was

1) K. F. Lindman, *Ann. d. Phys.* [5] **13**. S. 358. 1932; vgl. auch *Acta Acad. Aboensis, Math. et Phys.* VI Nr. 10.

2) M. Abraham, *Wied. Ann.* **66**. S. 435. 1898.

3) C. W. Oseen, *Ark. f. Mat., Astron. och Fys.* **9**. Nr. 30. 1913.

4) E. Hallén, *Uppsala Univ. Årsskrift* 1930 *Matem. o. Naturv.* Nr 1.

5) E. Hallén, *a. a. O.*, S. 59.

6) E. Hallén, *a. a. O.*, S. 17—18.

7) E. Hallén, *a. a. O.*, S. 17, 21.

indessen nicht mit der hohen Genauigkeit richtig ist, die Lindman erwartet. Auf diesen Punkt komme ich später zurück.

Betreffs Lindmans Resultate beginne ich mit dem Dämpfungsdekrement.<sup>1)</sup> Lindman gibt an, daß sein für einen 242 mm langen, 1,3 mm dicken Draht experimentell gefundener Wert  $\sigma_1 = 0,41$  mit der Abrahamschen Formel übereinstimmt, während Oseens und Halléns Formeln Abweichungen zeigen sollen. Nun lautet aber Abrahams vollständige Formel<sup>2)</sup> für das Ellipsoid:

$$\sigma_1 = \frac{4,875}{\Omega} + \frac{11,88}{\Omega^2} + \dots = 0,496,$$

während die Formel des Verf. für einen Zylinder folgendermaßen lautet:

$$\sigma_1 = \frac{4,875}{\Omega} + \frac{11,71}{\Omega^2} + \dots = 0,495.$$

Lindman hat als Abrahamschen Wert  $\sigma_1 = \frac{4,875}{\Omega} = 0,411$  benutzt, der in Abrahams Zusammenfassung vorkommt und natürlich nur eine erste Approximation für äußerst lange Drähte darstellt.<sup>3)</sup> Die Übereinstimmung, die Lindman zwischen seinem Meßresultat und Abrahams Formel findet, rührt also von einer unvollständigen Anwendung derselben her. In Wahrheit zeigt diese den größeren Unterschied gegen Lindmans Messung, wenn sie auch eben in diesem Fall äußert unbedeutend von der Formel des Zylinders abweicht. (Oseens Formel enthält nur das erste Glied der Reihenentwicklung und kann deshalb nicht dieselbe Genauigkeit beanspruchen.)

Auch für den genauen Wert der Wellenlänge der Eigenschwingungen soll nach Lindman eine äußerst gute Übereinstimmung zwischen seinen Meßresultaten für zylindrische Drähte und Abrahams Formeln für ellipsoidische bestehen, während hier meine Formeln merkbar größere Werte geben.

1) K. F. Lindman, a. a. O., S. 366, ausführlicher in Acta, a. a. O., S. 33.

2) M. Abraham, a. a. O., S. 464; Abraham schreibt:

$$\sigma_1 = 4 C_1(1) \varepsilon + 8 C_1^2(1) \varepsilon^2,$$

wo  $\varepsilon = \frac{1}{2\Omega}$  und  $4 C_1(1) = 9,74$ . Vgl. auch E. Hallén, a. a. O., Tabelle S. 61.

3) Vgl. J. Zenneck u. H. Rukop, Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie 1925, S. 39. Eine Berücksichtigung des zweiten Gliedes würde die Tabellenwerte um etwa 10 % erhöhen. Bei K. F. Lindman macht es aber 17 %.

Für einen 23,1 cm langen und 1,6 cm dicken Stab gibt Lindman<sup>1)</sup> an, daß die theoretischen Formeln für die halbe Wellenlänge nach Abraham 24,55, nach Oseen 24,81 und nach Hallén 28,73 cm ergeben sollten. Eine richtige Rechnung ergibt aber 23,81, bzw. 24,38, bzw. 26,34 cm, wodurch Lindmans Schluß in bezug auf diesen Leiter wohl ziemlich hinfällt.

Irgendwelchen Grund zu vermuten, daß Formeln, die für ein Ellipsoid hergeleitet worden sind, auch mit großer Genauigkeit für einen Zylinder gelten sollten, gibt es nicht. Eben in der von Lindman angeführten Arbeit von Rayleigh wird hervorgehoben, daß die Übereinstimmung auf das erste Glied begrenzt sein muß, d. h. nur mit einer Genauigkeit, bei der  $1/\Omega$  neben 1 vernachlässigt wird, kann ein Ellipsoid einen Zylinder ersetzen. Daß ein zylindrischer Draht größere Eigenwellenlänge als ein gleich langes und dickes Rotationsellipsoid haben muß, ist leicht einzusehen. Wenn eine elektrische Ladung sich in Ruhe auf einem Ellipsoid befindet, ist sie so verteilt, daß die Achse desselben gleichförmig belegt ist. Auf einem Zylinder häuft sich dagegen die Ladung mehr gegen die Enden<sup>2) 3)</sup>, was auch für sehr dünne Drähte im hohen Grade merkbar ist.<sup>3)</sup> Wenn sich nun der Draht in einem elektrischen Schwingungszustand befindet, verhält es sich ebenso und die größere Kapazität der Enden beim Zylinder vergrößert die Wellenlänge.

1) K. F. Lindman, a. a. O., S. 364.

2) J. C. Maxwell, Proc. of the London math. soc. 9. S. 94. 1878.

3) E. Hallén, Ark. f. Mat., Astron. och Fys. 21 A. Nr. 22. S. 43 und 44. 1929. Maxwells Arbeit war mir früher unbekannt. Obgleich die Methoden und Formeln ganz verschieden sind — Maxwell entwickelt die Belegungsfunktion nach von vornherein gegebenen Polynomen, ich nach unbestimmten Funktionen, aber nach Potenzen von  $1/\Omega$  — stimmen die Resultate äußerst genau überein. So wird z. B. die Eigenkapazität eines Zylinders, dessen Länge  $l$  gleich 500 mal dem Radius ist, sowohl nach Maxwells wie nach meiner Formel 0,08532  $l$ , und wenn die Länge 5000 mal dem Radius ist, nach Maxwell 0,06114  $l$  und nach Hallén 0,06112  $l$ . Für ein Ellipsoid erhält man nach der

Formel  $C = \frac{l}{\Omega}$  in den beiden Fällen 0,08046  $l$ , bzw. 0,05871  $l$ .

(Eingegangen 6. Juli 1932)

E. E.

Fer

perim  
wahr  
guetf  
trans  
versa  
änder  
rung  
Sättig  
versa  
der V  
änder

gneti

d. h.

„spor

der L

außer

ein i

wir

die S

pera

deru

„wah

berei

die

mach

die

1930

S. 84

Ztsch

## **Ferromagnetismus und elektrische Eigenschaften**

### **VI. Mitteilung<sup>1)</sup>: Longitudinale und transversale ferromagnetische Widerstandsänderung**

**Von Erno Englert<sup>2)</sup>**

(Mit 17 Figuren)

Inhaltsübersicht: 1. Mathematische Formulierung. — 2. Experimenteller Teil: a) Versuchsanordnung; b) Widerstandsabnahme durch wahre Magnetisierung in starken transversalen und longitudinalen Magnetfeldern; c) Sättigung der ferromagnetischen Widerstandsänderung im transversalen und longitudinalen Feld; d) Zugabhängigkeit der transversalen Sättigungswiderstandsabnahme von Nickel; e) Widerstandsänderung von Nickel durch mechanischen Zug und Orientierungsänderung der Magnetisierungsvektoren; f) Zugabhängigkeit der longitudinalen Sättigungswiderstandszunahme von Nickel; g) Longitudinale und transversale Widerstandsänderung von 92 Proz. Fe + 8 Proz. Ni; h) Hysterese der Widerstandsänderung; i) Sättigungsmagnetisierung und -widerstandsänderung bei verschiedenen Temperaturen. — 3. Zusammenfassung.

Nach der Theorie von Weiss kann man ein Ferromagnetikum in einzelne Bezirke einteilen, die zur „Sättigung“, d. h. bis zum Betrag der von der Temperatur abhängigen „spontanen Magnetisierung“ magnetisiert sind; die Richtung der Magnetisierungsvektoren ist aber verschieden, so daß nach außen keine magnetische Wirkung bemerkt werden kann. Wenn ein äußeres Feld die Magnetisierungsvektoren richtet, sprechen wir von „ferromagnetischer Magnetisierung“; ihre Grenze ist die Sättigung. Ist das Feld genügend stark (oder die Temperatur genügend hoch), daß durch ein äußeres Feld eine Änderung innerhalb der Bezirke eintritt, so sprechen wir von „wahrer Magnetisierung“. Im ferromagnetischen Temperaturbereich wird sich also eine wahre Magnetisierung an einer die „Sättigung“ überschreitenden Magnetisierung bemerkbar machen, wozu um so höhere Felder erforderlich sind, je tiefer die Temperatur ist.

1) Vgl. W. Gerlach u. Mitarbeiter, Ann. d. Phys. [5] **6**. S. 772. 1930; (I. Mitt.) **8**. S. 649. 1931; (II. Mitt.) **11**. S. 385. 1931; (III. Mitt.) **12**. S. 849. 1932; (IV. Mitt.) i. folg. cit. „I Mitt.“ usw.

2) E. Englert, Zweiter Teil der Münchener Dissertation; vgl. Ztschr. f. Phys. **74**. S. 748. 1932.



Die Lage der Magnetisierungsvektoren ist nach der Theorie von Becker<sup>1)</sup> ohne äußeres Feld durch die inneren Verspannungen gegeben; durch ein äußeres Magnetfeld kann sie auf zwei Arten geändert werden:

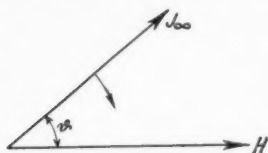


Fig. 1 a.  
Schema der Drehprozesse

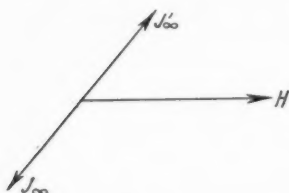


Fig. 1 b.  
Schema der Umklappprozesse

zwischen der positiven longitudinalen und der negativen transversalen Widerstandsänderung.<sup>3)</sup>

### 1. Mathematische Formulierung

Für die Widerstandsänderung magnetisch isotroper Ferromagnetika wie Nickel machen wir, ähnlich wie Kersten<sup>4)</sup> für die Magnetostriktion, in erster Näherung den Ansatz



Fig. 2

$$(1) \quad \frac{R - R_{\infty \perp}}{R_0} = a \cdot J_{\infty}^2 \cos^2 \vartheta;$$

$\vartheta$  (vgl. Fig. 2) ist der Winkel zwischen Magnetisierungsvektor und Stromrichtung,  $R_0$  der Widerstand bei Zimmertempe-

1) R. Becker, *Ztschr. f. Phys.* **62**, S. 253. 1930; R. Becker u. M. Kersten, *Ztschr. f. Phys.* **64**, S. 660. 1930.

2) W. Gerlach, II. u. IV. Mitteilung.

3) W. Gerlach, *Sitzungsber. Bayr. Akad. d. Wiss. Natur-Math. Klasse* 5. März 1932.

4) M. Kersten, *Ztschr. f. Phys.* **72**, S. 500. 1931.

ratur ohne Magnetfeld,  $R$  der Widerstand in einem Magnetfeld bei irgendeiner Temperatur und  $J_{\infty}$  die spontane (bzw. die Sättigungs-) Magnetisierung bei der gleichen Temperatur;  $R_{\infty \perp}$  ist der Widerstand, wenn alle Magnetisierungsvektoren zur Stromrichtung senkrecht stehen, entweder durch gesättigte transversale Magnetisierung oder (nach der Grundlage der Beckerschen Theorie) bei Nickel ohne äußeres Feld durch genügend starken Zug in der Stromrichtung erreichbar. Die Mittelung ist über die Richtungen der einzelnen Bereiche vorzunehmen; maßgebend ist also nur die Richtung von  $J_{\infty}$  zur Strombahn, nicht zum äußeren Magnetfeld  $H$ . Zur Vereinfachung der Problemstellung sei hier schon betont, daß die Konstante  $a$  sich experimentell als höchstens schwach temperaturabhängig<sup>1)</sup>, bei einzelnen Drähten vollständig temperaturunabhängig und unabhängig vom äußeren Zug ergibt; der ganze Bereich, in dem der Widerstand durch äußere Magnetfelder variiert werden kann, ist somit

$$(2) \quad \frac{R_{\infty \parallel} - R_{\infty \perp}}{R_0} = a \cdot J_{\infty}^2,$$

also proportional dem Quadrat der spontanen Magnetisierung<sup>2)</sup>;  $R_{\infty \parallel}$  ist der Sättigungswiderstand im longitudinalen Magnetfeld ( $H$  parallel zur Strombahn).

Eine Änderung in  $\vartheta$  von  $180^\circ$  beeinflußt nicht  $\cos^2 \vartheta$  und damit auch nicht  $\Delta R$ ; der Ansatz ist also in Einklang mit der Hypothese von W. Gerlach.

## 2. Experimenteller Teil

### a) Versuchsanordnung

Widerstand und Widerstandsänderung des Drahtes wurden durch Messung von Strom und Spannung mit Wolffschen Kompensationsapparaten ermittelt, die Temperatur durch Kompensation der EMK. eines an dem Draht angebrachten Thermoelementes. Bei etwaigen Temperaturänderungen während eines Versuches wurden alle Messungen mit dem (nebenher bestimmten) Temperaturkoeffizienten auf gleiche Temperatur reduziert.

In *schwachen Feldern* (bis 500 Gauss) wurde mit der von K. Schneiderhan<sup>3)</sup> beschriebenen Apparatur gemessen; die

1) Die schwache Temperaturabhängigkeit von  $a$  dürfte wohl darin begründet sein, daß die gegenseitigen inneren Verspannungen eine Funktion der Temperatur sind, bzw. sich bei höherer Temperatur (durch unvermeidbares Tempern) ändern; sie ist also nur ein Effekt zweiter Ordnung.

2) Vgl. Mitt. III und die Präzisierung dieser Ergebnisse in Teil 2, i meiner Arbeit.

3) K. Schneiderhan, III. Mitteilung.

Entmagnetisierung erfolgte mittels Wechselstrom und Schieberreostaten bis zu Feldern von  $< 6$  Gauss herab; dann wurde mit dem Entmagnetisierungsapparat von Gumlich und Rogowski<sup>1)</sup> von 30 Gauss ab vollständig entmagnetisiert.

*Starke Felder* (bis 17000 Gauss) wurden mit einem Weisschen Magnet mit Planpolschuhen von 10 cm Länge und 5 cm Breite und etwa 1 cm Polabstand erzeugt; die Feldmessung erfolgte ballistisch mit einer geeichten Verdetspule. Zur Messung der longitudinalen Widerstandsänderung war der Nickeldraht ( $l = 1$  cm,  $d = 0,0513$  mm, Abstand der Potentialdrähte 0,5 cm) mittels Schellack in die Achse eines Hartgummizylinders gekittet, der in seiner Längsrichtung zwischen die Polschuhe des Magneten geklemmt war; die Einstellung parallel zum Feld war damit auf  $1/2$  Grad sicher. Der feldlose Widerstand ergab sich als Minimum in der Hystereseschleife.

Zur Messung der transversalen Widerstandsänderung wurden die Drähte [ $l = 11$  cm,  $d = 0,203$  mm (bei Nickel) bzw. 0,116 mm (bei der Legierung 92 Proz. Fe + 8 Proz. Ni), Abstand der Potentialdrähte 4,5 cm] in einem Rahmen genau senkrecht zum Feld mittels einer geeichten Messingfeder gespannt. Der Widerstand wird also stets in der Längsrichtung des Drahtes gemessen, „longitudinal“ und „transversal“ bezeichnen die Richtung des magnetischen Feldes relativ zur Drahtachse bzw. Stromrichtung.

b) Die Widerstandsabnahme durch wahre Magnetisierung in starken transversalen und longitudinalen Magnetfeldern

Zur quantitativen Behandlung des in Abschnitt 1 formulierten Problems ist die Kenntnis der gesättigten Widerstandsänderung im longitudinalen und transversalen Feld erforderlich. Während erstere leicht in Feldern unter 1000 Gauss erhalten werden kann, wurde bei früheren Messungen der transversalen Widerstandsabnahme niemals eine Sättigung beobachtet, vielmehr zeigte sich mit wachsender Feldstärke eine zunächst schnell, dann langsam weiter zunehmende Widerstandsabnahme. Wegen des hohen Entmagnetisierungsfaktors in der Querrichtung benötigt man zur transversalen magnetischen Sättigung wesentlich höhere Felder als zur longitudinalen, so daß mit der Möglichkeit einer wahren Magnetisierung gerechnet werden muß, welche eine Widerstandsabnahme bedingt. Zur Bestimmung von  $R_{\infty \perp}$  muß also letztere berücksichtigt werden. Daher wurde zunächst die Widerstandsänderung in starken trans-

1) E. Gumlich u. W. Rogowski, *Ann. d. Phys.* **34**. S. 235. 1911.

versalen und longitudinalen Feldern gemessen, weil eine Widerstandsabnahme durch wahre Magnetisierung natürlich auch in ersteren in gleicher Größe eintreten muß.<sup>1)</sup>

Bei longitudinaler Magnetisierung wächst der Widerstand zunächst rasch an, erreicht ein Maximum und nimmt dann mit steigendem Feld langsam ab (Fig. 3, Kurve I) (Material: Elektrolytnickel von Schwerte); diese Widerstandsabnahme wurde schon früher<sup>2)</sup> beobachtet, doch meistens falscher Orientierung zugeschrieben. Sie ist jetzt als reeller Effekt sicher gestellt.

Im transversalen Feld (Fig. 3, Kurve II) nimmt der Widerstand zunächst schnell, dann langsam stetig ab. Nur der erste Teil ist durch die ferromagnetische Magnetisierung bedingt.

Nach Cabrera und Torroja<sup>3)</sup>, sowie W. Gerlach und K. Schneiderhan<sup>4)</sup> ist der Widerstand eines Ferromagnetikums durch die spontane Magnetisierung  $\sigma$  (spezifische Magnetisierung) verkleinert; es ist

$$(3) \quad \frac{\delta R}{R_0} = b \cdot \sigma^2,$$

$R_0$  ist der von oberhalb des Curiepunktes linear extrapolierte Widerstand bei Zimmertemperatur;  $b$  annähernd temperaturunabhängig, gleich  $1,7 \times 10^{-4}$ .

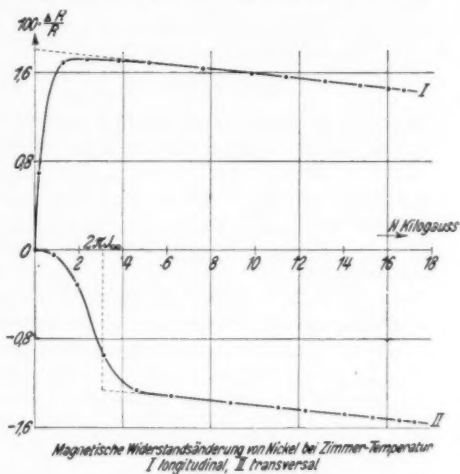


Fig. 3

1) Z. B. H. H. Potter, Phil. Mag. 13. S. 233. 1932; Proc. Roy. Soc. A 132. S. 560. 1931.

2) Vgl. bes. W. E. Williams, Phil. Mag. 9. S. 77. 1905; W. Morris Jones u. I. E. Malam, Phil. Mag. 27. S. 657. 1914.

3) B. Cabrera u. J. Torroja, Trabajos Lab. Invest. Fisicas Nr. 16 (1918) u. Nr. 17.

4) A. a. O. I. Mitteilung.

Nach Weiss und Forrer<sup>1)</sup> ändert man durch Felder von etwa 10000 Gauss die spontane Magnetisierung schon merklich; man sollte damit auch eine weitere Widerstandsabnahme erhalten.<sup>2)</sup> Aus (3) folgt durch Differentiation  $d\delta R = 2b R_0 \sigma d\sigma$ ; aus den Weiss-Forrerschen Kurven erhält man bei 20°

$$d\sigma = c \cdot H = 1,67 \times 10^{-5} H,$$

$\sigma$  selbst beträgt 54,4; damit errechnet sich die Widerstandsabnahme in einem Magnetfeld  $H$  zu

$$(4) \quad d\delta R = 2b \sigma R_0 c H = 1,82 \cdot 10^{-3} b R_0 H.$$

Diese Widerstandsabnahme überlagert sich in gleicher Weise sowohl der normalen ferromagnetischen Widerstandszunahme im longitudinalen als auch der ferromagnetischen Widerstandsabnahme im transversalen Magnetfeld; wie aus Fig. 3 ersichtlich ist, erfolgt in beiden Fällen die Abnahme linear mit dem Feld, also gemäß obiger Gleichung; *daraus schließen wir, daß die durch die Richtung der Magnetisierungsvektoren der Elementarbereiche erzeugte „ferromagnetische“ Widerstandsänderung Sättigung zeigt, und daß darüber eine Widerstandsabnahme als Folge der Erhöhung der spontanen Magnetisierung gelagert ist.*

Aus der Neigung dieser Geraden (vgl. Fig. 3), die im transversalen wie im longitudinalen Feld dieselbe ist, errechnen wir mittels Gl. (4) die Konstante  $b$  zu 0,59 bzw.  $0,60 \times 10^{-4}$ . Die Größenordnung von  $b$  ist dieselbe wie in der Beziehung (3), jedoch ist sie etwa dreimal kleiner, wenn ein äußeres Feld die spontane Magnetisierung  $\sigma$  ändert, als wenn  $\sigma$  durch die Temperatur variiert<sup>3)</sup> wird.

Daß es sich bei dieser Widerstandsabnahme um einen inneren Vorgang in den Elementarbereichen handelt und sicher nicht um einen ferromagnetischen Magnetisierungseffekt, sei noch durch die folgende Tabelle belegt. Sie gibt die gemessene Neigung der mit dem Feld  $H$  linearen Widerstandsabnahme aus einer größeren Anzahl von Messungen in hohen Feldern (vgl. auch Figg. 4 und 5), in welchen durch Zug oder Torsion die ferromagnetische Magnetisierungsfunktion und damit auch die ferromagnetische Widerstandsänderung in weiten Grenzen variiert: die Widerstandsabnahme pro Gauss ist völlig unabhängig davon konstant.

1) P. Weiss u. R. Forrer, *Ann. d. Phys.* **5**, S. 153. 1926.

2) W. Gerlach, *Ztschr. f. Phys.* **59**, S. 847. 1930; ferner IV. Mitt. S. 855. Anm. 1.

3) Es sind Versuche im Gang, ob diesem Faktor 3 eine prinzipielle Bedeutung zukommt.

Tabelle 1

Messung			Messung		
$-\frac{100 \Delta R}{R_0 \cdot H} \cdot 10^6$			$-\frac{100 \Delta R}{R_0 \cdot H} \cdot 10^6$		
Fig. 3	Kurve I	21,6	Fig. 5 <sup>1)</sup>	Kurve a	21,0
Fig. 4 <sup>1)</sup>	" 1	21,3	(Ni II)	b	20,5
(Ni I)	2	20,9		c	20,6
	3	21,1		d	21,0
	4	21,4		e	20,5
	5	21,6		f	20,6

Hiermit ist der Weg gegeben, aus jeder beobachteten Widerstandsänderung den gesuchten ferromagnetischen Anteil allein zu ermitteln.

c) Sättigung der ferromagnetischen Widerstandsänderung im transversalen und longitudinalen Feld

Im unmagnetischen, unverspannten und isotropen Nickel ist  $\cos^2 \vartheta = \frac{1}{3}$ , bei longitudinaler Sättigungsmagnetisierung  $\cos^2 \vartheta = 1$ , bei transversaler Sättigungsmagnetisierung  $\cos^2 \vartheta = 0$ , somit ist nach (1)

(5) 
$$\alpha = \frac{R_0 - R_{\infty \perp}}{R_{\infty \parallel} - R_0} = \frac{\Delta R_{\text{trans}}}{\Delta R_{\text{long}}} = 0,5;$$

dabei bedeuten  $R_{\infty}$  die Sättigungswerte, also die Widerstandsänderungen, die sich in starken Feldern ergeben, nachdem die Widerstandsabnahme durch Änderung der spontanen Magnetisierung (entsprechend Abschnitt b) eliminiert ist; somit ist bei longitudinaler Magnetisierung die Widerstandszunahme doppelt so groß wie bei transversaler Magnetisierung die Widerstandsabnahme; dies bestätigt auch roh die Erfahrung. Jones und Malam<sup>2)</sup> erhalten für  $\alpha$  den Wert 0,49, während Fig. 3 0,65 ergibt; die Abweichungen vom theoretischen Wert erklären sich zwanglos daraus, daß es schwierig ist, ein isotropes Nickel zu bekommen.<sup>3)</sup>

1) Die Figuren folgen weiter unten.  
2) W. M. Jones u. I. E. Malam, a. a. O.  
3) Die gleiche Gesetzmäßigkeit findet man übrigens auch bei der Magnetostriktion. Untersuchungsmaterial, welches mir Hr. Professor Gerlach zur Verfügung gestellt hat, zeigt, daß auch für die Magnetostriktion das gleiche quadratische Gesetz gelten dürfte wie für die Widerstandsänderung. Auch ist für isotropes Nickel das Verhältnis von Quereffekt zu Längseffekt der Magnetostriktion gleich 0,5.

## d) Die Zugabhängigkeit der transversalen Sättigungswiderstandsabnahme von Nickel

Nach der Theorie von Becker ist bei starkem Zug in einem longitudinalen Magnetfeld die Magnetisierungsrichtung eines Elementarbereiches gegeben durch

$$(6a) \quad \overline{\cos^2 \vartheta} = \left[ \frac{H \cdot J_{\infty}}{3\lambda \cdot Z} \right]^2$$

wobei  $\lambda$  die Magnetostriktion ( $\sim 4 \cdot 10^{-5}$ ) bedeutet; ohne äußeres longitudinales Feld ( $H = 0$ ) ist also  $\overline{\cos^2 \vartheta} = 0$ . Bei transversaler Magnetisierung eines solchen gezogenen Drahtes bleibt also  $\overline{\cos^2 \vartheta} = 0$ ; d. h. die Orientierung der Magnetisierungsvektoren zur Stromrichtung ist unabhängig von der Magnetisierung und damit auch der Widerstand konstant. Dieser Zustand konnte in meinen Messungen nicht *völlig* erreicht werden.

Daraus müssen wir schließen, daß die Elementarmagnete nicht alle senkrecht zur Drahtachse standen, d. h. daß auf sie noch die longitudinale Komponente eines inneren Feldes  $H_i$  wirkt; dies besteht offenbar in der Wechselwirkung zwischen benachbarten Elementarbereichen (vgl. Ganssches Streufeld<sup>1)</sup>; es braucht keinesfalls magnetisch zu sein, sondern kann auch noch durch die inneren Verspannungen vorgetäuscht bzw. modifiziert werden; das Streufeld ist an den einzelnen Stellen verschieden groß und verschieden gerichtet; der Mittelwert über die longitudinale Komponente  $\overline{H_i}$  ist gleich Null, jedoch ist  $\overline{H_i^2} > 0$ ; ist  $\vartheta$  sehr nahe gleich  $90^\circ$ , so hängt  $\overline{H_i^2}$  von  $\vartheta$ , also auch von  $Z$  nicht mehr wesentlich ab und wir erhalten somit

$$(6b) \quad \overline{\cos^2 \vartheta} = \frac{H_i^2 \cdot J_{\infty}^2}{9\lambda^2 Z^2};$$

damit wird die transversale Widerstandsabnahme eines solchen Nickeldrahtes unter starkem Längszug

$$(7) \quad \Delta R_{\infty \text{ trans}} = \frac{a \cdot J_{\infty}^4 H_i^2}{9\lambda^2} \cdot \frac{1}{Z^2} = \sim \frac{1}{Z^2}.$$

Fig. 4, Kurve 1—4 zeigt die transversale ferromagnetische Widerstandsabnahme von Ni I als Funktion des äußeren, unkorrigierten (Entmagnetisierungsfaktor =  $2\pi$ ) Feldes bei verschiedenen Spannungen  $Z$ . Fig. 5, Kurve a—f dasselbe für ein anderes Nickel Ni II.

1) R. Gans, Zur Theorie des Ferromagnetismus, Schriften der Königsberger Gel. Ges. 6. S. 59. 1929. Verl. Max Niemeyer, Halle a. S.

Die Widerstandsabnahme durch die wahre Magnetisierung ist, wie sich aus der gleichen Neigung aller Geraden der Fig. 4

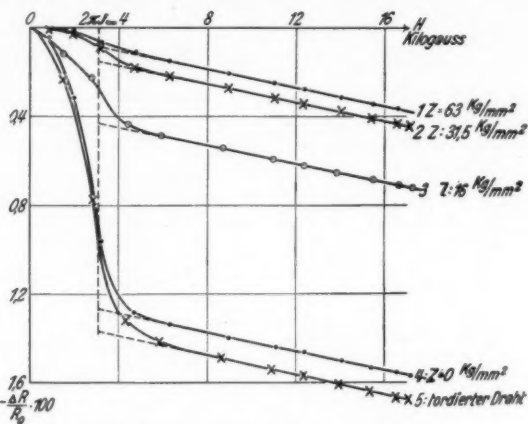


Fig. 4. Transversale Widerstandsabnahme von Nickel I unter zunehmendem Zug Z

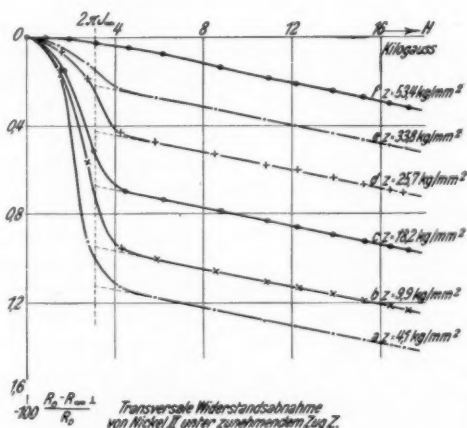


Fig. 5

und 5 ergibt (vgl. oben Abschn. b, Tabelle 1) spannungsunabhängig. Nach der (punktiert gezeichneten) graphischen Eli-



mination dieser Widerstandsabnahme ergibt sich nach Umrechnung der Messungen auf wahres Feld unter Berücksichtigung des Entmagnetisierungsfaktors die gesättigte transversale ferromagnetische Widerstandsabnahme ( $R_0 - R_{\infty \perp}$ ).

In Fig. 6 ist  $\frac{\Delta R_{\infty \perp}}{R_0}$  als Funktion von  $\frac{1}{Z^2}$  für die beiden Messungen der Figg. 4 und 5 gezeichnet. Bei hohen Spannungen ist der Verlauf linear, jedoch zeigt für  $Z \rightarrow \infty$  die

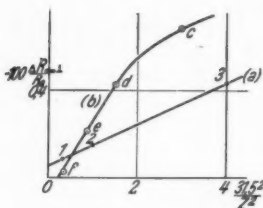


Fig. 6. Zugabhängigkeit der gesättigten transversalen ferromagnetischen Widerstandsabnahme

Einflüssen, welche in der prinzipiellen Theorie gar nicht enthalten sein können, und deren bevorzugte Beobachtung früher das ferromagnetische Problem so kompliziert machte.

Aus Fig. 6 ermitteln wir nach Formel (7) auch die Größe des Streufeldes  $\sqrt{H_i^2}$ , sie ergibt sich für Ni I (Fig. 4) zu 114 Gauss; für Ni II (Fig. 5) zu 216 Gauss.

Fig. 4, Kurve 5 gibt die Widerstandsabnahme des gleichen Drahtes nach Torsion. Durch sie erhalten die longitudinalen Magnetisierungsschleifen von Nickel einen rechteckig verlaufenden Bereich, d. h. die Elementarmagnete stehen schon im unmagnetischen Material häufig parallel zur Drahtachse; in diesem Fall wird  $\cos^2 \vartheta$  und damit die transversale Widerstandsabnahme vergrößert, wieder in Übereinstimmung mit der Grundannahme.

e) Widerstandsänderung von Nickel  
durch mechanischen Zug und Orientierungsänderung  
der Magnetisierungsvektoren

W. Gerlach<sup>1)</sup> hat darauf hingewiesen, daß die Widerstandsänderung ferromagnetischer Metalldrähte durch mechanischen Zug sich insoweit magnetisch deuten läßt, als durch

1) IV. Mitt. speziell S. 861—863.

den Zu-  
eintritt  
der ma-  
eine so-  
eine W-  
Zug—  
liefern.  
gegebe-  
vollkom-  
änderu-  
abhäng

sein, t-  
sie m-  
und o-  
Gegen-  
eine V-  
zunah-  
liche  
sunge

1  
2  
tikel K  
64. S.  
100 g  
Verlän

den Zug eine Änderung der Lage der Magnetisierungsvektoren eintritt. Da z. B. bei Nickel durch Längszug eine Orientierung der magnetischen Vektoren senkrecht zur Drahtachse eintritt, eine solche aber nach Aussage der magnetischen Messungen eine Widerstandsabnahme liefert, so muß auch Nickel durch Zug — ohne äußere Magnetisierung — eine Widerstandsabnahme liefern. Eigene Versuche, sowie das große von McKeehan<sup>1)</sup> gegebene Material, nach Gerlach diskutiert, bestätigten dies vollkommen. Die Größe dieser mechanischen Widerstandsänderung muß ferner von dem mechanischen Ausgangszustand abhängig sein, sie muß bei genügend großem Zug gesättigt

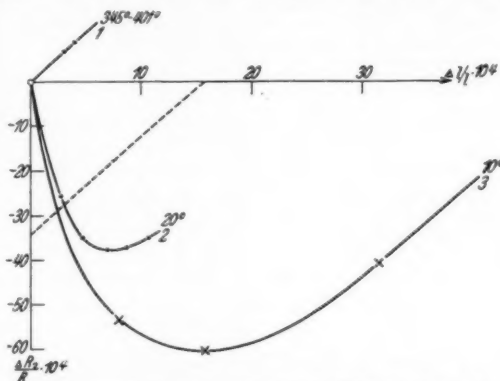


Fig. 7. Widerstandsabnahme von Nickel durch Zug

sein, sobald nämlich alle Vektoren senkrecht zum Draht stehen, sie muß ferner mit Annäherung an den Curiepunkt abnehmen und oberhalb desselben fortfallen.

Gerade diese Eigenschaften zeigt das Nickel, welches im Gegensatz zu fast allen anderen Metallen<sup>2)</sup> durch Zug zunächst eine Widerstandsabnahme, bei höherem Zug eine Widerstandszunahme zeigt. Oberhalb des Curiepunktes fällt die anfängliche Widerstandsabnahme fort. Fig. 7 enthält solche Messungen von Arzibyschew und Juschakow<sup>3)</sup> (Kurve 1 und 2)

1) L. W. McKeehan, Phys. Rev. **36**. S. 948. 1930.

2) Handbuch der Physik von Geiger-Scheel, Band XIII. Artikel E. Grüneisen.

3) S. Arzibyschew u. W. J. N. Juschakow, Ztschr. f. Phys. **64**. S. 408. 1930, Fig. 2; Kurve 2 wurde wegen der Anfangslage von 100 g Zug ( $l = 50$  cm,  $d = 0.3$  mm) korrigiert. Statt des Zugs ist die Verlängerung als Abszisse aufgetragen.

sowie von mir (Kurve 3). Die Kurve ist zu zerlegen in eine Abnahme durch die Orientierung der Vektoren bis zur Sättigung und eine darauffolgende Zunahme ( $\frac{\Delta R_2}{R_0}$  vgl. unten), wie sie alle anderen Metalle zeigen; ihre Neigung ist punktiert eingezeichnet. Zahlenmäßig ist

$$\frac{\Delta R_2}{R_0} = 1,08 \cdot 10^{-4} \cdot Z.$$

In der folgenden Tabelle 2 bedeutet

$\Delta R_1/R_0$  die gemessene Widerstandsabnahme durch äußeren Zug allein,  
 $\Delta R_2/R_0$  die normale, dem äußeren Zug proportionale Widerstandszunahme, welche nicht-ferromagnetische Metalle zeigen,  
 $\Delta R_3/R_0$  die weitere gesättigte Widerstandsabnahme durch transversale Magnetisierung.

$$\Delta R = \Delta R_1 + \Delta R_2 + \Delta R_3.$$

Tabelle 2

Z kg/mm <sup>2</sup>	0	16	31,5	63
$10^4 \Delta R_1/R_0$	0	53	60	41
$10^4 \Delta R_2/R_0$	0	17	34	68
$10^4 \Delta R_3/R_0$	120	36	9	2
$10^4 \Delta R/R_0$	120	106	103	101

Wie man aus der Tabelle ersieht, bleibt die gesamte Widerstandsabnahme merklich dieselbe, gleichgültig, ob die Elementarmagnete durch Zug oder Magnetfeld senkrecht zur Drahtachse gestellt werden.

Die Widerstandsabnahme durch den Zug allein zeigt eine interessante Hysterese; belastet man den Draht zunächst mit 31 kg/mm<sup>2</sup>, wobei der Widerstand um 6 Promille abnimmt, und entlastet ihn dann, so steigt der Widerstand nur um 3,3 Promille; schaltet man dann ein starkes, transversales Magnetfeld ein und wieder aus, so nimmt der Widerstand nochmals um 3 Promille zu; bei weiterem Ein- und Ausschalten des Magnetfeldes bleibt er konstant.<sup>1)</sup>

Nach der Entspannung des Drahtes sind offenbar noch Elementarmagnete labil senkrecht zur Drahtachse geblieben; durch

1) Übrigens wird auch beobachtet, daß der Widerstand eines belasteten Drahtes sich nach der ersten Magnetisierung geändert hat, dann aber ohne Feld immer denselben Wert behält, wobei natürlich magnetische Hystereseerscheinungen ausgeschlossen wurden.

das Magnetfeld werden sie aus der labilen Lage gebracht und es stellt sich schließlich nach Ausschalten des Feldes die stabile, isotrope Verteilung ein.

f) Zugabhängigkeit der longitudinalen Sättigungswiderstandszunahme von Nickel

Im longitudinalen Feld soll nach gleicher Überlegung mit größer werdender Spannung die Sättigung der Widerstandszunahme zunehmen; denn es ist bei unendlich großer Spannung (also  $\Delta R_{\infty \perp} = 0$ )

$$(8a) \quad \frac{R_{\infty \parallel} - R_0}{R_0} = a J_{\infty}^2,$$

während im isotropen Fall

$$(8b) \quad \frac{R_{\infty \parallel} - R_0}{R_0} = \frac{2}{3} a J_{\infty}^2$$

ist.

Die folgende Tabelle gibt eine Meßreihe von McKeehan<sup>1)</sup>; der Durchmesser des Drahtes war 0,15 cm.

Tabelle 3

$Z \text{ kg/mm}^2$	$H_{\text{max}}$ Gauss	$\frac{R_{\infty \parallel} - R_0}{R_0} \cdot 100$
0	1390	1,77
12,9	1610	2,46
26	1700	2,60

Das Verhältnis der Widerstandsänderung in der ersten und letzten Horizontalspalte ist 0,68, während es nach der Theorie 0,67 sein sollte.

g) Longitudinale und transversale Widerstandsänderung von 92 Proz. Fe + 8 Proz. Ni

Außer Nickel wurde noch ein Draht von der Zusammensetzung 92 Proz. Fe + 8 Proz. Ni untersucht; es war dasselbe Material, mit dem Preisach<sup>2)</sup> im longitudinalen Feld unter genügender Spannung reine Rechtecksschleifen als Feld-Magnetisierungskurven erhielt (vgl. auch unten Fig. 13).

Nach Messungen von Masiyama<sup>3)</sup> ist die Magnetostriktion ähnlich der von reinem Nickel, nur von umgekehrtem Vor-

1) L. W. McKeehan, Phys. Rev. **36**. S. 951. 1930. Es ist hier nur als Funktion des Feldes gemessen; bei den angegebenen Feldwerten  $H_{\text{max}}$  dürfte aber die ferromagnetische Sättigung erreicht gewesen sein.

2) F. Preisach, Ann. d. Phys. [5] **3**. S. 337. 1929; wir danken Hrn. Prof. Barkhausen herzlich für seine Überlassung.

3) Y. Masiyama, Science Rep. Tohoku Univ. **20**. S. 574. 1931.

zeichen und halb so groß; es existiert kein Villaripunkt; die Daten sind:

	92% Fe + 8% Ni	Ni rein
Längseffekt $\lambda = \frac{\delta l}{l}$	$+ 18 \cdot 10^{-6}$	$- 40 \cdot 10^{-6}$
Quereffekt $\frac{\delta s}{s}$	$- 10 \cdot 10^{-6}$	$+ 20 \cdot 10^{-6}$
Volumeneffekt $\frac{\delta v}{v}$	$+ 1 \cdot 10^{-7}$	$- 0,7 \cdot 10^{-7}$

Das entgegengesetzte Vorzeichen ist darin begründet, daß Nickel durch Längsdruck, dagegen die Legierung 92 Proz.

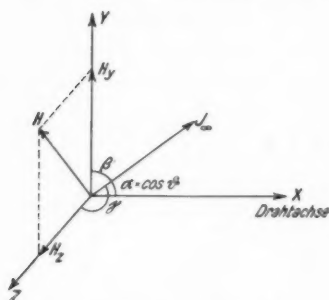


Fig. 8. Lage von  $H$  und  $J_{\infty}$  im Koordinatensystem

Fe + 8 Proz. Ni durch Längszug eine Rechteckschleife als Magnetisierungskurve erhält. Wir halten daher die Annahme für berechtigt, daß auch dieses Material sich in der Magnetostriktion isotrop bezüglich der Kristallrichtungen verhält wie Nickel, so daß wir die Formeln von Becker unter Vernachlässigung der Volumänderung<sup>1)</sup> bei der Magnetisierung benutzen können. Es ist<sup>2)</sup>

$$(9) \quad U_{\text{dip}} = \frac{1}{2} \lambda Z (3\beta^2 + 3\gamma^2 - 2),$$

wenn wir in der Beckerschen Gleichung  $\alpha^2 = 1 - (\beta^2 + \gamma^2)$  setzen (Fig. 8).

Herrscht ein Magnetfeld  $H$  senkrecht zur Drahtachse, dessen Komponenten bezüglich der  $y$ - und  $z$ -Achse  $H_y$  und  $H_z$  sind, so ist

$$\cos(JH) = \frac{H_y \cdot \beta + H_z \cdot \gamma}{\sqrt{H_y^2 + H_z^2}}$$

1) Bei Berücksichtigung der Volummagnetostriktion ist in den Formeln für  $\beta$  und  $\gamma$  statt  $\lambda$  zu setzen:  $\lambda \left( 1 - \frac{\delta v}{v \cdot \lambda} \cdot \frac{4\mu + 1}{3(1 - 2\mu)} \right)$ , (wobei  $\frac{\delta v}{v} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ ); das Korrektionsglied von etwa 1 Proz. ist zu vernachlässigen.

2) R. Becker u. M. Kersten, *Ztschr. f. Phys.* 64. S. 664. 1930.

und somit

$$U = \frac{1}{2} \lambda Z (3\beta^2 + 3\gamma^2 - 2) - J_{\infty} (H_y \cdot \beta + H_z \cdot \gamma).$$

Die Magnetisierungsrichtungen  $\beta$  und  $\gamma$  als Funktion von  $H$  sind bestimmt durch das Minimum von  $U$ , also

$$(10) \quad \gamma = \frac{H_z \cdot J_{\infty}}{3 \lambda Z}; \quad \beta = \frac{H_y \cdot J_{\infty}}{3 \lambda Z}.$$

Im Grenzfall sehr starken Zugs stehen also die Elementarmagnete parallel zur Drahtachse, wie Becker für (92 Proz. Fe + 8 Proz. Ni)-Drähte erwartet hat.<sup>1)</sup>

Nehmen wir nun wieder ein inneres Streufeld an, dessen mittlere transversale Komponente

$$\sqrt{H_y^2} = \sqrt{H_z^2} = \sqrt{H_{tr}^2}$$

bei starkem Zug von  $Z$  unabhängig ist, so erhalten wir für die longitudinale Widerstandszunahme<sup>2)</sup>

$$(11) \quad \frac{R_{\infty} \parallel - R_0}{R_0} = a J_{\infty}^2 (1 - \cos^2 \vartheta) = \frac{2a J_{\infty}^2 H_{tr}^2}{9 \lambda^2} \cdot \frac{1}{Z^2}.$$

Mit wachsender Spannung erhält man im longitudinalen Feld eine kleiner werdende Widerstandszunahme, im transversalen Feld eine größer werdende Widerstandsabnahme; dies zeigt in der Tat die folgende Tabelle unserer Messungen:

Tabelle 4

$Z \text{ kg/mm}^2$	$\Delta R_{\infty \text{ long}}$	$\Delta R_{\infty \text{ trans}}$	$\Delta R_{\infty \parallel} - \Delta R_{\infty \perp}$
0	4,6 <sup>0</sup> / <sub>100</sub>	1,8	6,4
45	1,1	4,6	5,7
90	0,3	5,05	5,35

Nach der letzten Spalte bleibt die Differenz zwischen longitudinaler und transversaler Sättigung annähernd dieselbe.<sup>3)</sup>

1) R. Becker, Ztschr. f. Phys. 62. S. 268. 1930.

2)  $\alpha^2 = 1 - (\beta^2 + \gamma^2) = \cos^2 \vartheta$ .

3) Die kleine Differenz zwischen den verschiedenen Summenwerten der letzten Spalte kann durch verschiedene, an sich nebensächliche Ursachen bedingt sein; z. B. in der Unsicherheit, ob bei einem Zug 90 kg bei den verwendeten Feldern schon vollständige Sättigung erreicht war; oder darin, daß in den Widerstandswerten noch die kleine Widerstandsänderung unbekannten Ursprungs zu berücksichtigen wäre, welche die auf S. 598 behandelte Abweichung von dem  $1/Z^2$ -Gesetz hervorruft; schließlich ist auch der Nullpunkt für die Widerstandsänderung in denjenigen Fällen nicht ganz sicher, in welchen bei transversaler Magnetisierung eine kleine anfängliche Widerstandszunahme eintritt.

Fig. 9 bringt die gemessene transversale Widerstandsabnahme; in schwachen Feldern erfolgt bei kleinen Spannungen Widerstandszunahme, die mit größer werdender Spannung all-

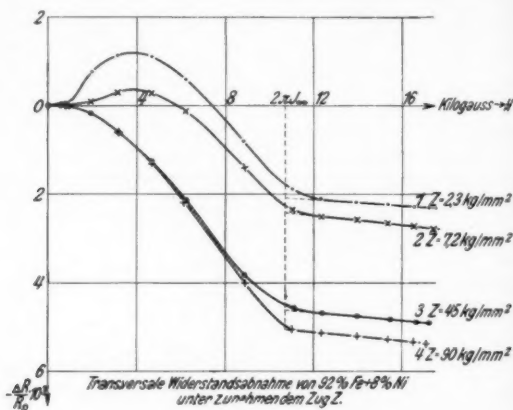


Fig. 9

mählich verschwindet. Die Widerstandszunahme rührt wahrscheinlich daher, daß die Elementarmagnete sich zuerst in der Richtung der Drahtachse anhäufen, wie Kersten beim Nickel diskutiert.

Nach Fig. 10 ist die gesättigte Widerstandszunahme durch longitudinale Magnetisierung proportional  $1/Z^2$ , soweit aus den wenigen Meßpunkten ersichtlich ist; die mittlere Transversalkomponente des Streufeldes  $\sqrt{H_{tr}^2}$  berechnet sich zu etwa 48 Gauss.<sup>1)</sup>

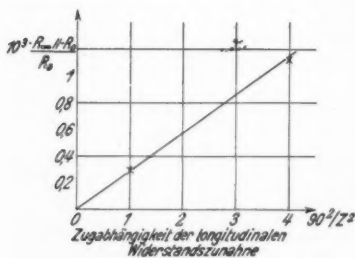


Fig. 10

#### b) Die Hysterese der Widerstandsänderung

Stierstadt<sup>2)</sup> zeigte, daß die Widerstandsänderung keine eindeutige Funktion des Induktionsflusses  $B$  in der Hysterese-

1) R. Gans berechnet (l. c.) für Fe die gleiche Größenordnung (weiches Fe 210 Gauss, Stahl 797 Gauss).

2) O. Stierstadt, Phys. Ztschr. 31. S. 561. 1930.

schleife ist. W. Gerlach<sup>1)</sup> schloß aus dem Zusammenfall der Sättigung von Widerstandsänderung und Magnetisierung, daß für die Widerstandszunahme die Magnetisierung  $J$  die gegebene Zustandsgröße ist. Im folgenden wird daher  $\Delta R$  nur als Funktion von  $J^2$  betrachtet.

In einem Feld parallel zur Drahtachse ist die Magnetisierung

$$J = J_{\infty} \overline{\cos \vartheta}$$

und somit

$$J^2 = J_{\infty}^2 \overline{\cos^2 \vartheta}.$$

Ist  $\vartheta$  für die einzelnen Bereiche sehr verschieden (infolge innerer Verspannungen), so kann bei gleichem  $\overline{\cos^2 \vartheta}$ , (d. h. gleichem  $J^2$ ), jedoch  $\overline{\cos^2 \vartheta}$  (d. h.  $\Delta R$ ) noch beliebig sein; der Zusammenhang zwischen beiden wird gegeben sein 1. durch die magnetische Vorgeschichte des Materials und 2. durch die inneren Spannungen. Zwischen  $\Delta R$  und  $J^2$  wird also keine einfache, in der Hystereseschleife nicht einmal eine eindeutige Beziehung bestehen.

Ist jedoch für alle Bereiche  $\vartheta$  dasselbe, so ist

$$\overline{\cos \vartheta^2} = \overline{\cos^2 \vartheta}$$

und somit die Widerstandszunahme eine eindeutige Funktion der Magnetisierung.

Dieser Fall ist bei Nickel erfüllt

1. in der Nähe der Sättigung von Widerstandszunahme und Magnetisierung, wo  $\vartheta$  unabhängig von den einzelnen Bereichen nur noch Funktion des Magnetfeldes ist;
2. wenn der äußere Zug  $Z$  groß gegen die inneren Verspannungen ist.

In beiden Fällen bekommen wir in der Grenze gegen starke Felder für die Widerstandszunahme

$$\frac{R - R_0}{R_0} = a J_{\infty}^2 (\overline{\cos^2 \vartheta} - \overline{\cos^2 \varepsilon}) = a (J^2 - J_0^2),$$

wenn wir

$$J_{\infty}^2 \overline{\cos^2 \varepsilon} = J_0^2$$

setzen, wobei  $\varepsilon$  der Winkel zwischen Magnetisierungsvektor und Strombahn vor Beginn der ferromagnetischen Magneti-

1) W. Gerlach, II. u. IV. Mitt.



sierung durch Drehungen ist; sind die Richtungen isotrop verteilt, so ist

$$\overline{\cos^2 \varepsilon} = \frac{1}{3}$$

und somit

$$J_v^2 = \frac{1}{3} J_\infty^2,$$

dies ist aber die Beziehung, die W. Gerlach und K. Schneiderhan für die Widerstandszunahme von gut getempertem Nickel

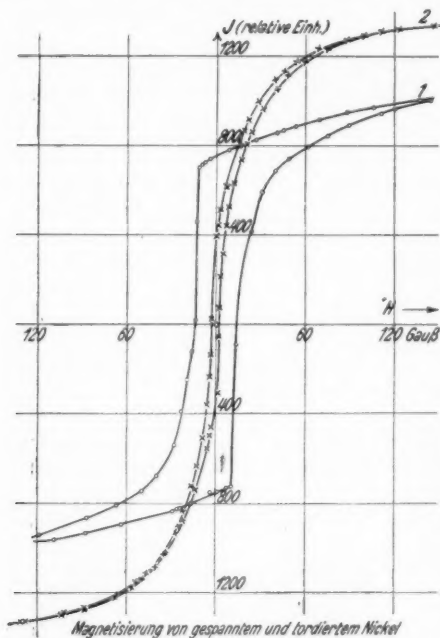


Fig. 11

kem Zug die Widerstandszunahme in die einfache Beziehung

$$\Delta R = a J^2$$

übergeht.<sup>2)</sup>

Diese Gesetze wurden zunächst nochmals an Nickel + 0,6 Proz.

gefunden haben; aus ihren Messungen ersieht man sogleich, daß  $a$  sich dann mit der Temperatur entweder gar nicht oder nur schwach ändert (vgl. auch unter Figur 16).

Ist der Nickeldraht innerlich verspannt, so wird  $\overline{\cos^2 \varepsilon}$  kleiner, die untere Grenze ist Null:

$$0 \leq \overline{\cos^2 \varepsilon} \leq \frac{1}{3}.$$

hiermit drückt sich der experimentelle Befund<sup>1)</sup> aus, daß bei gezogenem Draht die asymptotische Gerade

$$\Delta R = a (J^2 - J_0^2)$$

schon bei kleineren  $J$ -Werten beginnt, wobei  $a$  unabhängig vom Zug bleibt und schließlich bei star-

1) K. Schneiderhan, III. Mitteilung.

2) W. Gerlach, IV. Mitteilung. Fig. 2 u. 4.

Mangan<sup>1)</sup> geprüft. Fig. 11 bringt die Magnetisierung; in Kurve 1 war der Draht tordiert, die Magnetisierungsschleife deshalb zum Teil rechteckig. Bei Kurve 2 ist der Draht vorher ausgeglüht und dann gespannt worden; die Remanenz ist etwa auf die Hälfte gesunken.

Fig. 12 stellt in beiden Fällen  $\Delta R$  als Funktion von  $J^2$  dar; Kurve 2 (gespannter Draht) ist im größten Teil ihres Verlaufes hysteresefrei und die Grenzbeziehung  $\Delta R = a \cdot J^2$  ist gut erfüllt:  $J_0$  ist infolge der Spannung schon sehr klein ge-

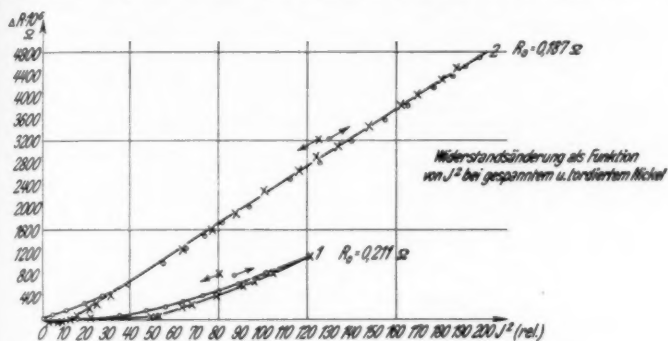


Fig. 12

worden. In Kurve 1 (tordierter Draht) ist die Hysterese und  $J_0$  groß, auch die Linearität nicht erfüllt, da Widerstandsänderung und Magnetisierung noch weit von der Sättigung entfernt sind.

Sehr deutlich erscheint im Fall des tordierten Drahtes I die Trennung zwischen Drehprozessen und Umklappprozessen; im rückläufigen Ast der Schleife, dem meist „hysteresefrei“ genannten Teil der  $(J, H)$  Kurve, erfolgen zuerst hauptsächlich Drehungen, wodurch  $\cos^2 \vartheta$  und damit  $\Delta R$  auf etwa 2 Proz. der Sättigungswiderstandsänderung abnimmt. Dann erfolgen die Umklappungen (Barkhausensprünge in der Rechteckschleife),  $\cos^2 \vartheta$  und damit  $R$  ändert sich fast gar nicht mehr, während  $J$  zu Null wird. Im aufsteigenden Ast der Schleife erfolgen

1) Diese Legierung verhält sich genau wie reines Nickel. Wir bevorzugen sie, weil zeitliche und thermische Änderungen, wie sie reines Nickel vielfach zeigt, bei ihr nicht auftreten. Der „Bearbeitungszusatz“ von etwas Mangan macht das Nickel auch magnetisch gleichmäßig.

Umklappungen und Drehungen nicht mehr scharf getrennt; der Bruchteil der Drehungen bei einer bestimmten Magnetisierung  $J$  ist hier größer als im absteigenden Ast.

Es sei noch auf eine generelle Besonderheit der Widerstandshysteresekurve hingewiesen: das Minimum der Widerstandsänderung fällt nicht mit der Magnetisierung  $J = 0$  zusammen, d. h. „Widerstandskoerzitivkraft“ ( $H_{CR} =$  äußeres Feld, bei dem der Widerstand in der Hystereseschleife sein Minimum erreicht) und „Magnetisierungskoerzitivkraft“  $H_{CJ}$  sind von einander verschieden, meistens ist  $H_{CJ}$  um etwa 10–30 Proz. größer wie  $H_{CR}$ .<sup>1)</sup>

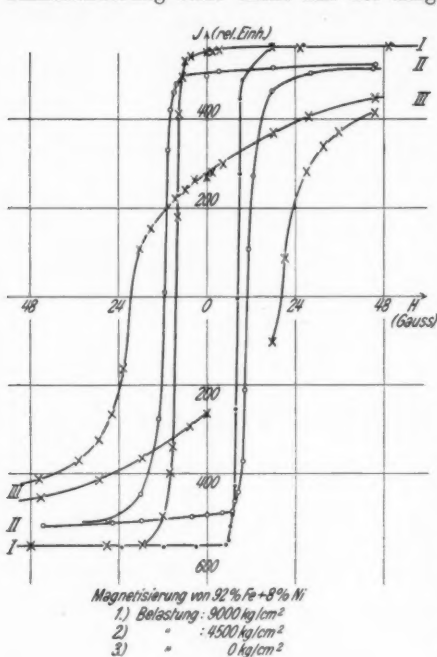


Fig. 13

Spannungen; je größer  $Z$  ist, desto ausgeprägter sind die Rechteckschleifen; gleichzeitig wird die longitudinale Widerstandszunahme mit steigender Zugbeanspruchung kleiner (Fig. 14).

Die Beziehung ( $\Delta R, J^2$ ) (Fig. 15) zeigt Hysteresen.<sup>2)</sup> Im rückläufigen Teil der Magnetisierungsschleife liegt praktisch

1) Über Einzelheiten der Hysteresen der Widerstandsänderung wird an anderer Stelle eine besondere Mitteilung erscheinen.

2) Die Sättigungswerte, die besonders bestimmt wurden, sind in Tab. 4 enthalten.

zusammen, d. h. „Widerstandskoerzitivkraft“ ( $H_{CR} =$  äußeres Feld, bei dem der Widerstand in der Hystereseschleife sein Minimum erreicht) und „Magnetisierungskoerzitivkraft“  $H_{CJ}$  sind von einander verschieden, meistens ist  $H_{CJ}$  um etwa 10–30 Proz. größer wie  $H_{CR}$ .<sup>1)</sup>

Außer Nickel wurde noch ein Draht mit 92 Proz. Fe + 8 Proz. Ni untersucht, bei dem nach Ausweis der Magnetisierungskurven (Rechteckschleifen) unter Zug die Elementarmagnete parallel zur Drahtachse stehen.

Fig. 13 bringt die Magnetisierung unter verschiedenen

Wider-  
von  
1) Be-  
2)  
3)

Ma-  
wäh-  
Wi

die ganze Widerstandsänderung zwischen Sättigung und Remanenz, obwohl sich z. B. bei Kurve 2 (Zug 45 kg/mm<sup>2</sup>) die

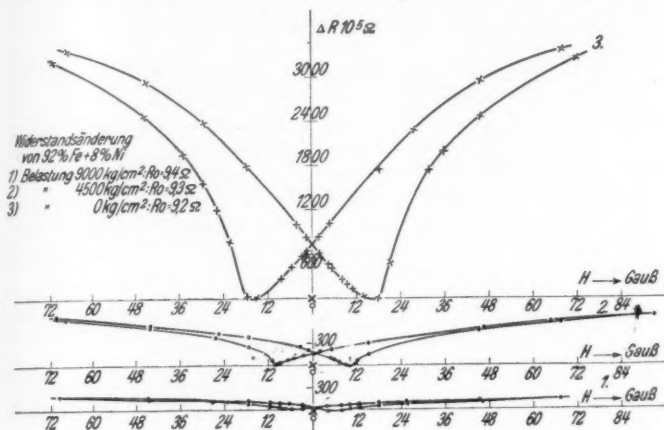


Fig. 14

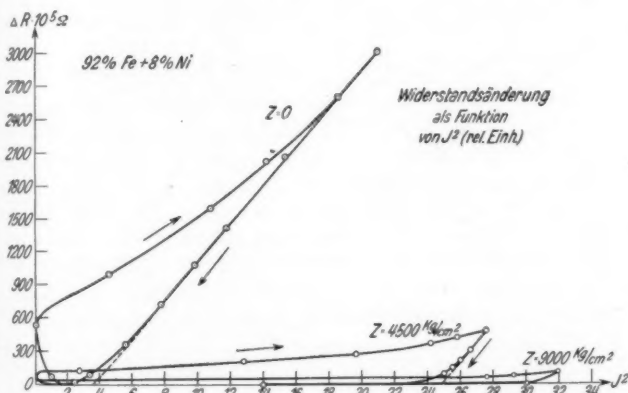


Fig. 15

Magnetisierung in diesem Bereich nur um etwa 6 Proz. ändert; während des großen Sprunges der Magnetisierung bleibt der Widerstand fast völlig konstant.

Die Trennung zwischen Umklappungen und Drehungen tritt also auch hier wieder deutlich hervor; für letztere gilt

$$\frac{\Delta R}{R_0} = a(J^2 - J_0^2),$$

im Gegensatz zu Nickel wird bei der Legierung (92 Proz. Fe + 8 Proz. Ni)  $J_0$  mit zunehmendem Zug größer, da durch ihn  $\overline{\cos^2 \epsilon}$  gegen 1 geht; die Neigung  $a$  ist spannungsunabhängig.

In dem Fall der Rechteckschleifen scheinen doch auch bei großem äußerem Zug (nach der Form der Hysterese bei 90 kg/mm<sup>2</sup> zu schließen) für die Lage der Elementarmagnete die inneren Verspannungen (das Ganssche Streufeld) noch eine Rolle zu spielen, wie ja aus anderen Gründen auch schon oben (Abschn. 2g) geschlossen wurde.

i) Sättigungsmagnetisierung und -widerstandsänderung bei verschiedenen Temperaturen

In der dritten Mitteilung hat K. Schneiderhan gezeigt, daß bei verschiedenen Temperaturen die longitudinale Sättigungswiderstandsänderung

$$\frac{R_{\infty \parallel} - R_0}{R_0} = a(J_{\infty}^2 - J_0'^2)$$

ist, wobei  $J_0'^2$  gegenüber  $J_{\infty}^2$  bei Zimmertemperatur sehr klein war; nach der Beziehung

$$\frac{R_{\infty \parallel} - R_0}{R_0} = a J_{\infty}^2 (\overline{\cos^2 \vartheta} - \overline{\cos^2 \epsilon}) = a J_{\infty}^2 (1 - \overline{\cos^2 \epsilon})$$

( $\epsilon$  ist wieder der Winkel zwischen Magnetisierungsvektor des Elementarbereichs und Stromrichtung ohne äußeres Magnetfeld,  $\vartheta$  derselbe Winkel bei einem Feld  $H$ ) sollte die Widerstandsänderung proportional zu  $J_{\infty}^2$  sein, falls  $\overline{\cos^2 \epsilon}$  temperaturunabhängig ist; dies war sicher nicht der Fall, da der Draht bei Zimmertemperatur etwas gespannt war und sich infolge der Wärmeausdehnung bei höherer Temperatur entspannte; dabei wurde  $\overline{\cos^2 \epsilon}$  größer. Um diese unbekannte Temperaturfunktion zu umgehen, trägt man vorteilhafter

$$\frac{R_{\infty \parallel} - R_{\infty \perp}}{R_0} = a J_{\infty}^2$$

als Funktion des Quadrats der spontanen Magnetisierung auf.

Fig. 16 zeigt die longitudinale Widerstandsänderung bei verschiedenen Temperaturen als Funktion von  $J^2$  (Ni + 0,6 Proz. Mn); die Grenzbeziehung

$$\frac{R_{\infty \parallel} - R_0}{R_0} = a(J^2 - J_0^2)$$

E. En

ist so  
Durch  
 $J = 0$ 

die, v

(R/R<sub>0</sub>)\*10<sup>2</sup>

400

300

200

100

0

Fig. 1

lang  
änd  
Wic

ist sehr gut erfüllt,  $a$  ist unabhängig von der Temperatur. Durch Extrapolieren dieser Geraden auf die Ordinatenachse  $J = 0$  erhält man die Größe

$$\frac{R_{\infty} \parallel - R_{\infty} \perp}{R_0},$$

die, wie Fig. 17 zeigt, proportional zu  $J^2_{\infty}$  ist.

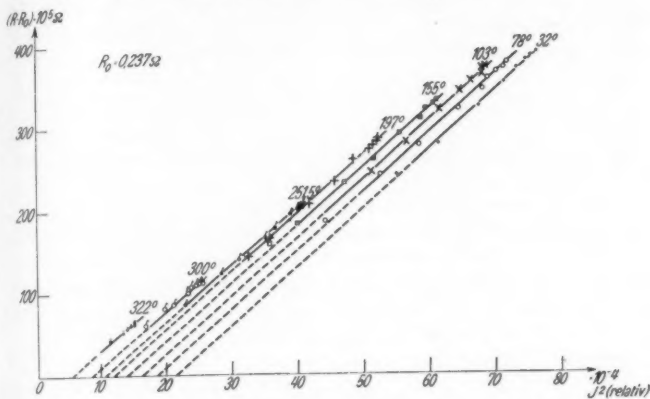


Fig. 16. Longitudinale Widerstandsänderung als Funktion des Quadrates der Magnetisierung

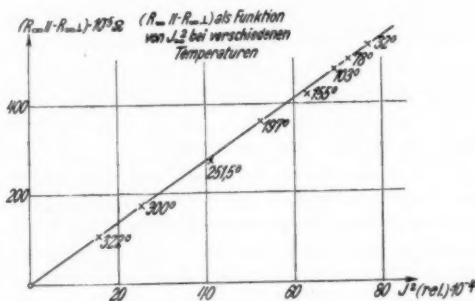


Fig. 17

Diese Betrachtung zeigt nochmals, daß es für die Erlangung einer allgemeinen Gesetzmäßigkeit der Widerstandsänderung nicht angängig ist, die longitudinale oder transversale Widerstandsänderung allein zu betrachten.

**Zusammenfassung**

Die wesentlichsten Ergebnisse sind:

1. Die in hohen äußeren longitudinalen und transversalen Feldern auftretende Widerstandsabnahme ist der Vergrößerung der spontanen Magnetisierung zuzuschreiben, deren Quadrat sie proportional ist.

2. Die ferromagnetische Widerstandsänderung wird mit der Richtungsänderung der Magnetisierungsvektoren in Zusammenhang gebracht gemäß der Beziehung

$$\Delta R = a R_0 J_\infty^2 (\overline{\cos^2 \vartheta} - \overline{\cos^2 \vartheta}).$$

3. Hiermit werden frühere und neue experimentelle Befunde über die ferromagnetische Widerstandsänderung quantitativ gedeutet; nämlich

- a) der Zusammenhang zwischen longitudinaler Widerstandszunahme und transversaler Widerstandsabnahme (Abschn. 2c Nickel, Abschn. 2f 92 Proz. Fe + 8 Proz. Ni);
- b) die Zugabhängigkeit der ferromagnetischen Widerstandsänderung (Abschn. 2d, e);
- c) die Zugabhängigkeit des Widerstandes von Nickel ohne Feld (Abschn. 2e);
- d) die Hysterese in der  $\Delta R$ ,  $J^2$ -Beziehung (Abschn. 2h);
- e) die gesamte gesättigte Widerstandsänderung  $\Delta R_{\infty \parallel} - \Delta R_{\infty \perp}$  ist proportional dem Quadrat der Sättigungsmagnetisierung zwischen  $0^\circ$  und  $322^\circ$  (Abschn. 2i);
- f) die Proportionalitätskonstante ist für isotropes Nickel unabhängig von der Temperatur.

Der Notgemeinschaft Deutscher Wissenschaft danken wir erneut für die Überlassung eines der wertvollen Wolffschen Kompensationsapparate, der Helmholtzgesellschaft für die Beschaffung von Draht für die Magnetisierungsspulen, sowie den Firmen Deutsche Gold- und Silberscheideanstalt (Zweigstelle Pforzheim) und W. C. Heraeus (Vacuumschmelze Hanau) für die kostenfreie Herstellung von sehr reinem Versuchsmaterial.

Die Untersuchungen wurden auf Veranlassung und unter Leitung von Hrn. Prof. Dr. W. Gerlach durchgeführt.

München, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 12. Mai 1932)

**Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit von  
E. Englert, betreffend die Widerstandsänderung  
in Eisenkristallen**

**Von Walther Gerlach**

Die in vorstehender Abhandlung von E. Englert gegebene umfassende Deutung der Beobachtungen über die longitudinale und transversale Widerstandsänderung ferromagnetischer Drähte erlaubt, die früher<sup>1)</sup> von mir gegebene Deutung der entsprechenden Websterschen<sup>2)</sup> Messungen an Eisenkristallen präziser zu fassen und auf die Eisenkristallmessungen bei transversaler Magnetisierung auszudehnen.<sup>3)</sup>

Vor der Diskussion muß darauf hingewiesen werden, daß die transversalen Messungen in sehr hohen Feldern (bis 28000 Gauss) ausgeführt wurden, so daß also die gleiche Widerstandsabnahme durch wahre Magnetisierung zu erwarten ist, wie sie von Englert diskutiert wurde; deren Betrag ist nach Scherung der Websterschen Kurven ( $N = 2\pi$ ;  $2\pi J_\infty = 10800$  Gauss) von der gesamten Widerstandsabnahme abziehen, um die *ferromagnetische* transversale Widerstandsabnahme allein zu erhalten. Diese Widerstandsabnahme durch wahre Magnetisierung ist natürlich — wie Webster auch betont — unabhängig von der Richtung der Magnetisierung, was ja auch in der vorstehenden Arbeit von Englert festgestellt ist.

Webster hat die Widerstandsänderung  $\Delta R$  Proz. von Eisenkristallen durch ferromagnetische Magnetisierung als Funktion der Richtungen zwischen Strombahn  $i$ , Magnetisierung  $J$  und Kristallachsen gemessen.  $J \parallel i$  nennt man den „longitudinalen“,  $J \perp i$  den „transversalen“ Fall.

Die frühere Diskussion des longitudinalen Falles führte zu dem Ergebnis, daß die Widerstandsänderung nur mit der Drehung des Magnetisierungsvektors  $J_\infty$  [aus der ihm „spontan“ zukommenden (100)-Richtung im Kristall in die erzwungene Magnetisierungsrichtung] verbunden ist. Die Widerstands-

1) W. Gerlach, Ann. d. Phys. [5] 8. S. 649. 1931.

2) W. L. Webster, Proc. Roy. Soc. London A. 113. S. 196. 1926.

3) W. L. Webster, Proc. Roy. Soc. London A. 114. S. 611. 1927.



zunahme als Funktion von  $J$  ergab sich für den Fall  $[J \parallel i \parallel (100)]$  — gemäß dem quadratischen Gesetz  $\Delta R = c(J^2 - J_0^2)$  — gleich  $C \left( J^2 - \frac{1}{2} J_\infty^2 \right)$ , für den Fall  $[J \parallel i \parallel (111)]$  gleich  $C \left( J^2 - \frac{1}{3} J_\infty^2 \right)$ , die gesättigten longitudinalen Widerstandsänderungen betragen

$$\Delta R_\infty(100) = \sim 0; \Delta R_\infty(110) = \frac{1}{2} C J_\infty^2; \Delta R_\infty(111) = \frac{2}{3} C J_\infty^2.$$

Setzt man die longitudinale Widerstandsänderung gleich

$$\Delta R = C J_\infty^2 (\cos^2 \vartheta - \cos^2 \varepsilon),$$

wobei  $\varepsilon$  den Winkel des Magnetisierungsvektors vor,  $\vartheta$  nach der Magnetisierung zur Sättigung bedeutet, so ist

Richtung	(100)	(110)	(111)
$\cos^2 \varepsilon$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\cos^2 \vartheta$	1	1	1
$\Delta R_\infty = 0$		$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$ .

Es soll in folgendem gezeigt werden, daß auch die scheinbar recht komplizierten transversalen Messungen, also  $J \perp i$ , sich nach dem gleichen Gesichtspunkt deuten lassen, daß nämlich die Widerstandsänderung nur von der Änderung der Richtung zwischen Magnetisierungsvektor und Strombahn abhängt; man darf also im transversalen Fall nicht schlechthin von der „Widerstandsänderung in einer Kristallrichtung“ sprechen!

Ein Kristall sei in der (110)-Richtung von Strom  $i$  durchflossen. Wird es transversal magnetisiert, so kann diese Magnetisierung entweder parallel (100) sein, oder (als zweiter ausgezeichnete Fall) parallel (110). Im ersten Fall tritt durch die transversale Magnetisierung keine Änderung des Winkels ( $i, J_\infty$ ) ein, also auch keine ferromagnetische Widerstandsänderung, was der Beobachtung von Webster entspricht.

Im zweiten Fall  $i \parallel (110)$ ,  $J \parallel (110)$ ,  $J \perp i$ , liegt bei der Magnetisierung genau die gleiche Änderung des Winkels ( $i, J_\infty$ ) vor, wie bei der longitudinalen Magnetisierung  $\parallel (110)$ , nur mit entgegengesetztem Vorzeichen; es ist also zu erwarten

$$|\Delta R_{\text{trans}}| = |\Delta R_{\text{long}}|.$$

Beobachtet ist longitudinal + 0,28 Proz., transversal - 0,26 Proz. Unter Berücksichtigung der Genauigkeit der Messung von

Webster und der Unsicherheit in der Scherung der transversalen Magnetisierungskurven dürfte diese Übereinstimmung genügen.

Bei kontinuierlicher Variation des Winkels zwischen Magnetisierungsrichtung und Lage des Magnetisierungsvektors  $J_{\infty}$  variiert die transversale Widerstandsabnahme mit einer Periode von  $180^{\circ}$  zwischen 0 und  $-\Delta R_{\infty}$  genau so, wie es sich geometrisch berechnet.

Ein Kristall sei in der (111)-Richtung von Strom durchflossen. Der Cosinus des Winkels zwischen Magnetisierungsvektor  $J_{\infty}$  und der Stromrichtung beträgt  $1/\sqrt{3}$ , er wird bei der Sättigung 0; dies gilt für alle Richtungen des magnetisierenden Feldes, solange nur die transversale Bedingung  $J \perp i$  erfüllt ist. Die Widerstandsänderung berechnet sich zu  $-\frac{1}{3} C J_{\infty}^2$ , sie ist also kleiner als im Fall  $[i \parallel (110), J \parallel (110)]$ , in dem sie  $-\frac{1}{2} C J_{\infty}^2$  beträgt, und halb so groß wie die longitudinale Widerstandszunahme in (111). Beobachtet ist

$$\Delta R_{\infty \text{trans}}(111) = -0,20 \text{ Proz.} \quad \Delta R_{\infty \text{long}}(111) = +0,40 \text{ Proz.}$$

Statt der berechneten Verhältnisse

$$\frac{\text{long}(111)}{\text{trans}(111)} = 2 \text{ bzw. } \frac{\text{trans}(111)}{\text{trans}(110)} = 0,66$$

ergeben Websters Messungen 2 bzw. 0,77; sie liefern ferner eine nur sehr geringe und anormale Winkelabhängigkeit, die (wie auch Webster betont) sicher wesentlich auf experimentellen Unvollkommenheiten beruht.

Auch die Summenbeziehung für die longitudinale und transversale Widerstandsänderung ist erfüllt (Englert Abschn. 2g) Für  $\Delta R_{\infty \text{long}} - \Delta R_{\infty \text{trans}}$  ergibt sich nämlich für die Richtung (110): 0,54; für (111): 0,60.

Schließlich der Fall, daß der Strom parallel zu (100) verläuft. Erfolgt die transversale Magnetisierung ebenfalls parallel zu (100), so ändert sich  $\cos \vartheta$  nicht, also ist auch (wie beobachtet)  $\Delta R = 0$ . Wird ein so orientierter Stab parallel zu (110) magnetisiert, so bleibt der Winkel  $(i, J_{\infty})$  gleichfalls konstant. Hier liegt die einzige Diskrepanz zwischen der Errechnung und dem Experiment, indem Webster in diesem Fall  $-i \parallel (100) J \perp i, J \parallel (110)$  — eine (allerdings) kleine Widerstandszunahme beobachtet, dazu noch in einem Feldbereich, welches

schon oberhalb des magnetischen Sättigungsfeldes liegt. In Anbetracht der vollständigen Deutung aller anderen longitudinalen und transversalen Widerstandsänderungen mag die Annahme berechtigt erscheinen, daß dieser *einen* Ausnahme kein prinzipieller, sondern ein zufälliger Umstand zugrunde liegt.

Die vorstehende Darlegung zeigt, daß die Gesamtheit der bisher vorliegenden Messungen über die Widerstandsänderung in Eisenkristallen durch die Magnetisierung mit den generellen Beziehungen, die aus Messungen an polykristallinem Draht gewonnen wurden, hinreichend gut übereinstimmt.

München, Physikalisches Institut der Universität, Mai 1932

(Eingegangen 12. Mai 1932)

---

In An  
dinalen  
nahme  
prin

eit de  
lerung  
erelles  
Drak

i 1932